25ο Θερινό Σχολείο – Συνέδριο «Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
ΑΘΗΝΑ 9 – 17 Ιουλίου 2018

Εφαρμογή μη-γραμμικών και ντετερμινιστικών (χαοτικών) εργαλείων στον έλεγχο της Υπόθεσης Αποτελεσματικότητας Αγοράς (ΥΑΑ) στις Αγορές Ηλεκτρισμού

Δρ Γ. Παπαϊωάννου
Διευθυντής Έρευνας, Τεχνολογίας & Ανάπτυξης,
ΑΔΜΗΕ

ΑΤΖΕΝΤΑ

- **Μέρος Α’**

  Α1 Οι Ηλεκτρικές Αγορές Ελλάδας και Ιταλίας

  Α2 Τιμές Χονδρικής (SPOT) SMP και PUN

  Α3 Τιμές Γενικού Χρηματιστηριακού Δείκτη ASE (Ελλάδας) και FTMIB (Ιταλίας)

  Α4 Περιληπτική Στατιστική, έλεγχοι κανονικότητας, στασιμότητας κλπ.

  Α5 Ιδιαιτερότητες των τιμών spot Ηλεκτρισμού, σύγκριση με τιμές Χρηματοοικονομικών Αγορών

ΑΤΖΕΝΤΑ

- **Μέρος Β’**

  B1 Αποτελεσματικές Αγορές και η Υπόθεση Αποτελεσματικών Αγορών (Efficient Market Hypothesis, EMH).

  B2 Μέτρα (measures) (εργαλεία) Γραμμικής και Μη-Γραμμικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, για έλεγχο της EMH

  B3 Έλεγχος EMH με γραμμικά και μη-γραμμικά εργαλεία ανάλυσης χρονοσειρών.

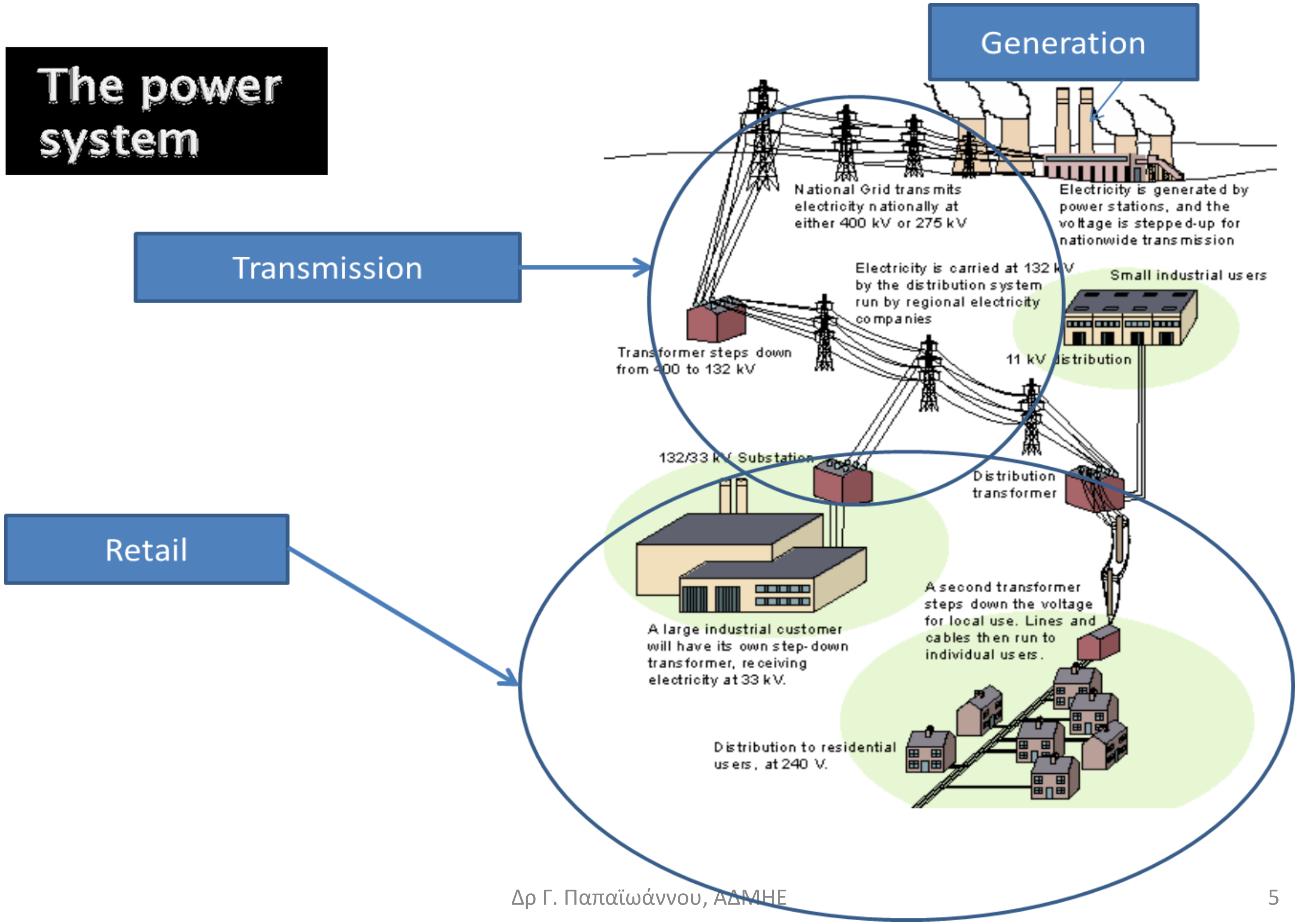
ΑΤΖΕΝΤΑ

- **Μέρος Γ’**

  Γ1 Πρόταση: Διαμόρφωση Σύνθετου Δείκτη μέτρησης της Αποτελεσματικότητας των Ηλεκτρικών Αγορών

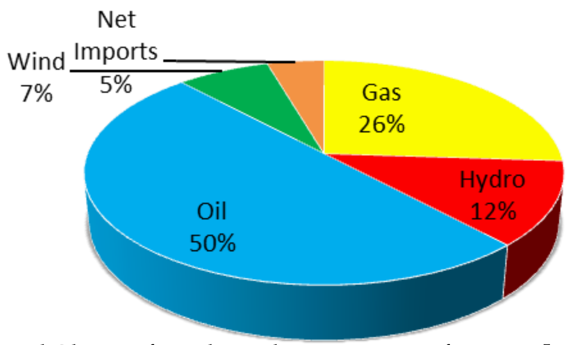
  Γ2 Εφαρμογή στις Αγορές Ηλεκτρισμού Ελλάδας – Ιταλίας

A1 Οι Ηλεκτρικές Αγορές Ελλάδας και Ιταλίας

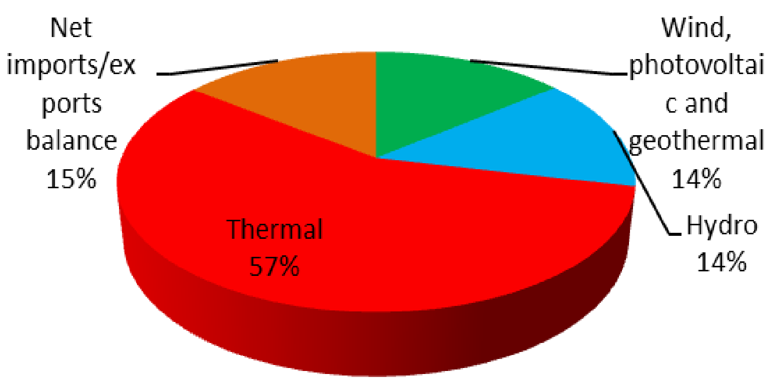


ΜΕΡΟΣ Α

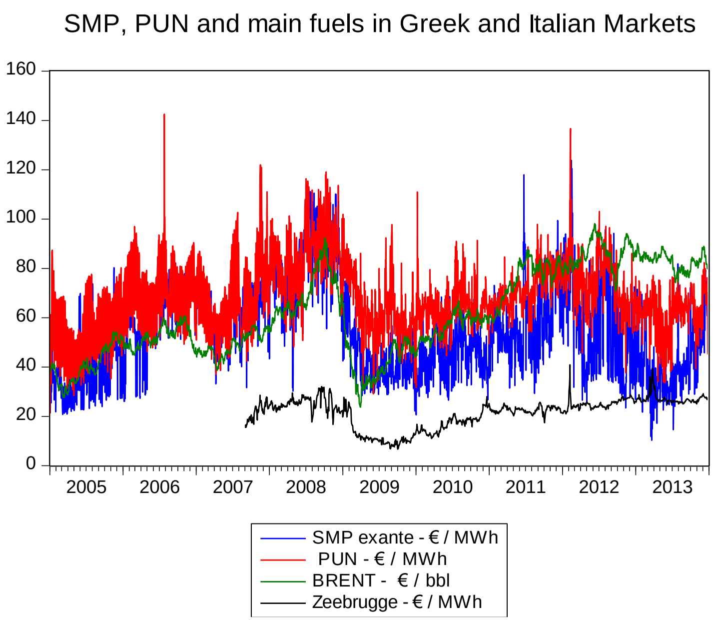
Α1 Οι Ηλεκτρικές Αγορές Ελλάδας και Ιταλίας



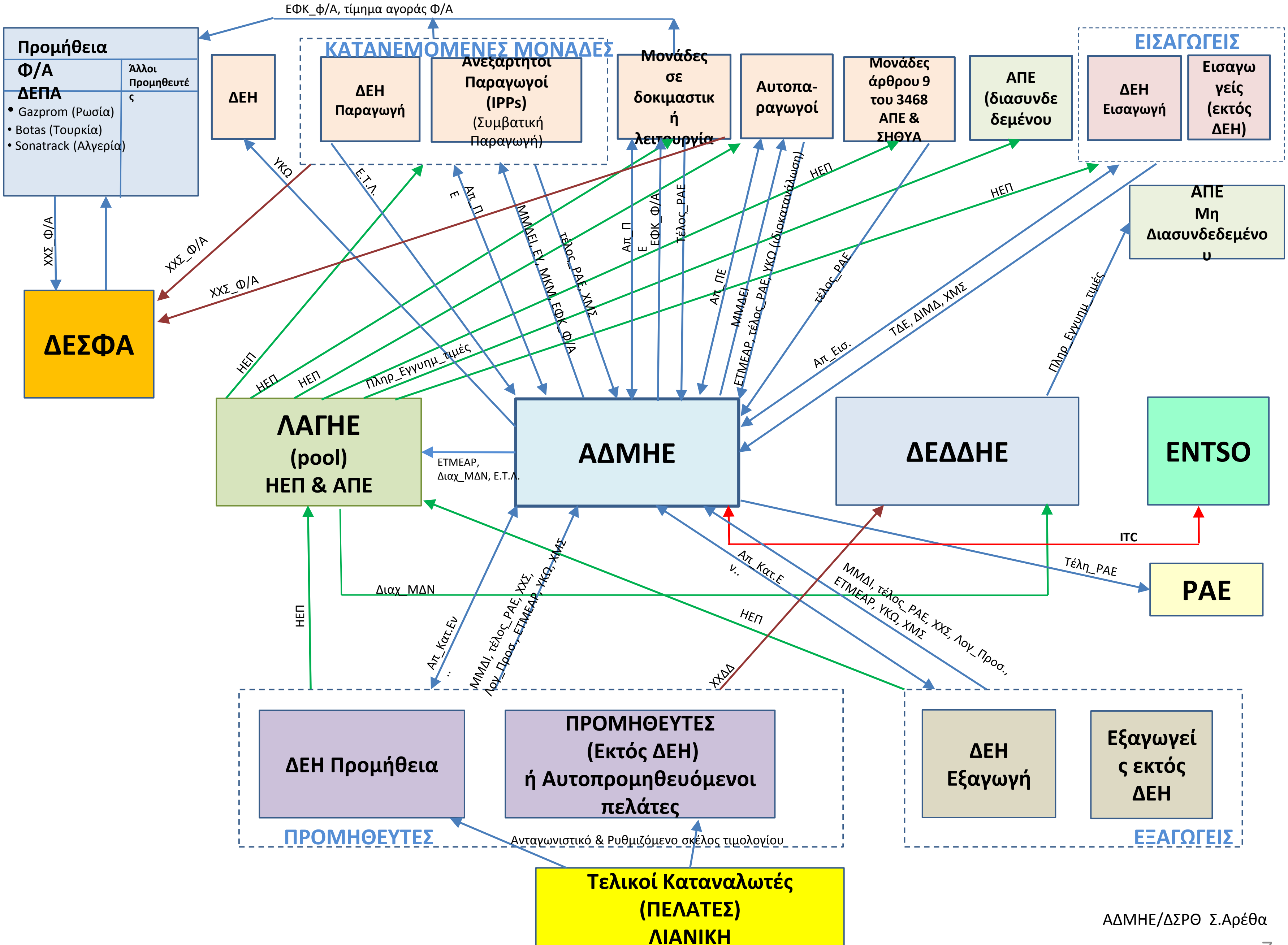
Greek Annual Share of Fuels and Net Imports for 2014 [25] (2014 National Report to the European Commission by Regulatory Authority for Energy in Greece)



Italian Electricity net production per energy source and imports in 2014 [37-38]

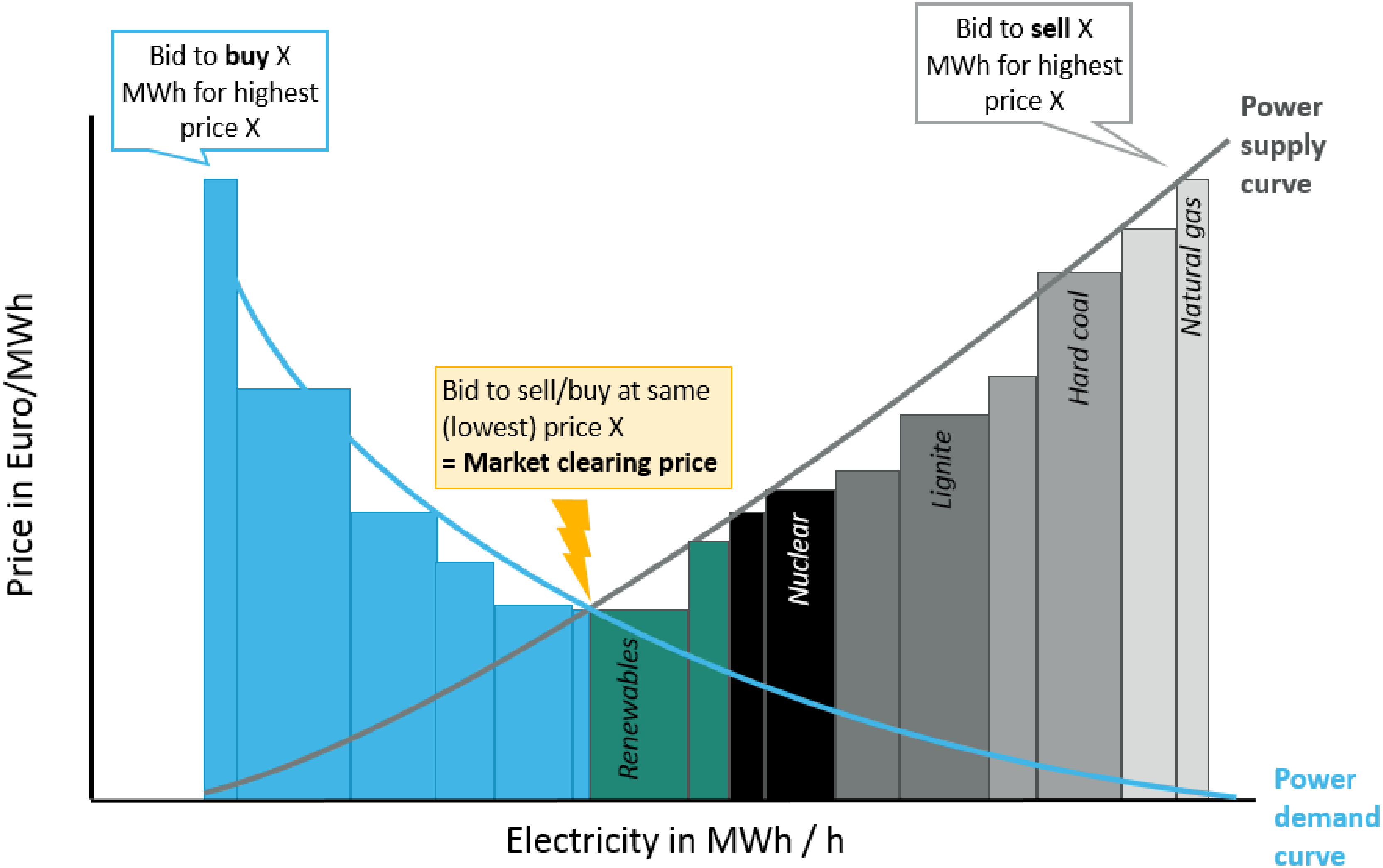


SMP, PUN daily electricity wholesale prices and the main fuels (Brent Oil and Natural Gas) used in generation, 2005-2013

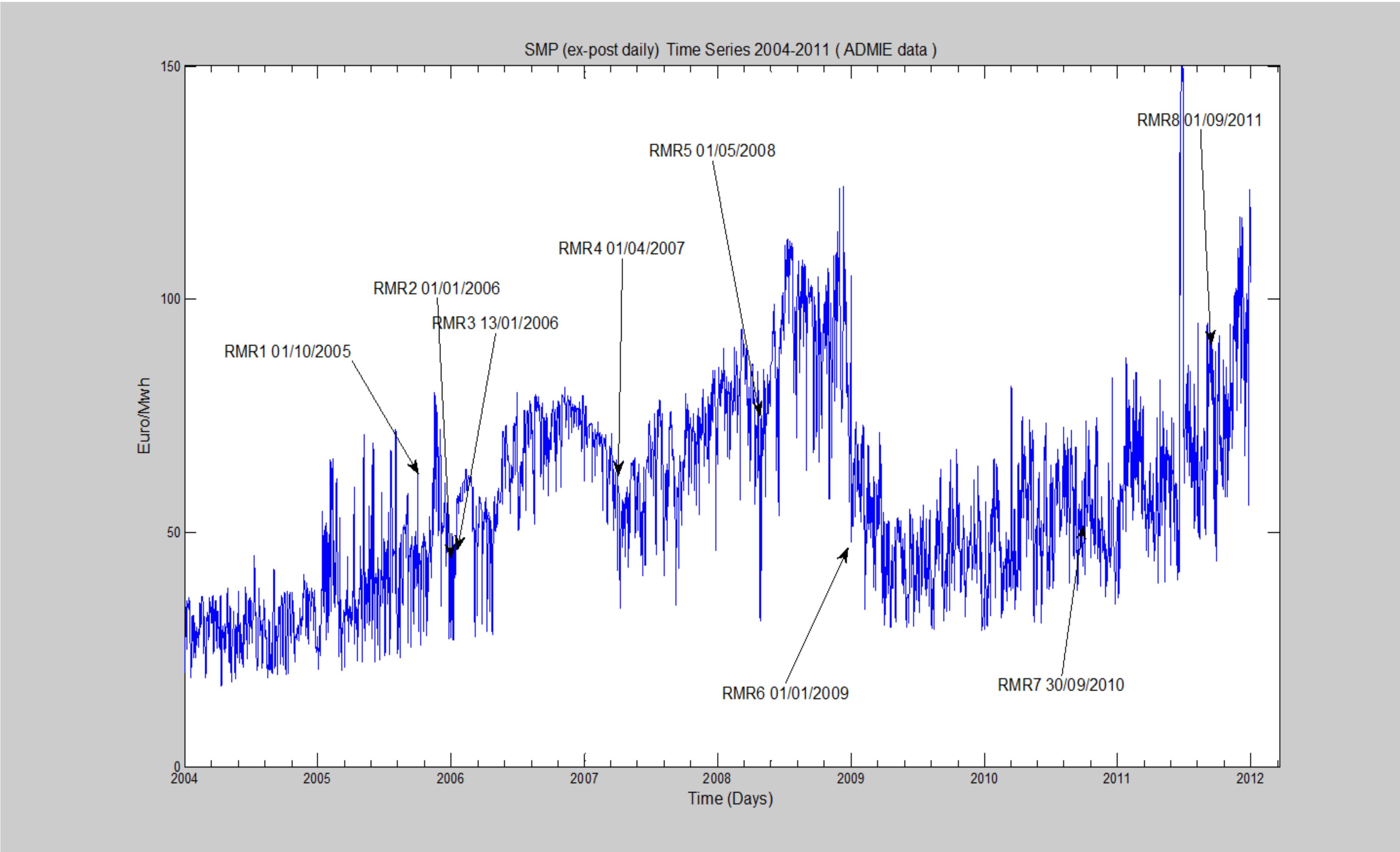


ΕΦΚ_φ/Α, τίμημα αγοράς Φ/Α
Προμήθεια Φ/Α
ΔΕΠΑ
Άλλοι Προμηθευτές
• Gazprom (Ρωσία)
• Botas (Τουρκία)
• Sonatrack (Αλγερία)
ΚΑΤΑΝΕΜΟΜΕΝΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ
ΔΕΗ
ΔΕΗ Παραγωγή
Ανεξάρτητοι Παραγωγοί (IPPs) (Συμβατική Παραγωγή)
Μονάδες σε δοκιμαστική λειτουργία
Αυτοπαραγωγοί
Μονάδες άρθρου 9 του 3468 ΑΠΕ & ΣΗΘΥΑ
ΑΠΕ (διασυνδεδεμένου
ΕΙΣΑΓΩΓΕΙΣ
ΔΕΗ Εισαγωγή
Εισαγωγείς (εκτός ΔΕΗ)
ΑΠΕ Μη Διασυνδεδεμένου
ΧΧΣ_Φ/Α
ΥΚΩ
Ε.Τ.Λ.
Απ_Π Ε
ΜΜΔΕΙ, ΕΥ, ΜΚΜ, ΕΦΚ_Φ/Α
τέλος_ΡΑΕ, ΧΜΣ
Απ_Π Ε
ΕΦΚ_Φ/Α
Τέλος_ΡΑΕ
Απ_ΠΕ
ΜΜΔΕΙ
ΕΤΜΕΑΡ, τέλος_ΡΑΕ, ΥΚΩ (ιδιοκατανάλωση)
ΗΕΠ
τέλος_ΡΑΕ
ΤΑΕ, ΔΙΜΔ, ΧΜΣ
Απ_Εισ.
Πληρ_Εγγυημ_τιμές
ΔΕΣΦΑ
ΛΑΓΗΕ (pool) ΗΕΠ & ΑΠΕ
ΑΔΜΗΕ
ΔΕΔΔΗΕ
ENTSO
ΕΤΜΕΑΡ, Διαχ_ΜΔΝ, Ε.Τ.Λ.
ITC
Τέλη_ΡΑΕ
ΡΑΕ
Διαχ_ΜΔΝ
Απ_Κατ.Ενν..
ΜΜΔΙ, τέλος_ΡΑΕ, ΧΧΣ, Λογ_Προσ., ΕΤΜΕΑΡ, ΥΚΩ, ΧΜΣ
ΧΧΔΔ
ΜΜΔΙ, τέλος_ΡΑΕ, ΧΧΣ, Λογ_Προσ., ΕΤΜΕΑΡ, ΥΚΩ, ΧΜΣ
ΔΕΗ Προμήθεια
ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΕΣ (Εκτός ΔΕΗ) ή Αυτοπρομηθευόμενοι πελάτες
ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΕΣ
ΔΕΗ Εξαγωγή
Εξαγωγείς εκτός ΔΕΗ
ΕΞΑΓΩΓΕΙΣ
Ανταγωνιστικό & Ρυθμιζόμενο σκέλος τιμολογίου
Τελικοί Καταναλωτές (ΠΕΛΑΤΕΣ) ΛΙΑΝΙΚΗ
ΑΔΜΗΕ/ΔΣΡΘ Σ.Αρέθα

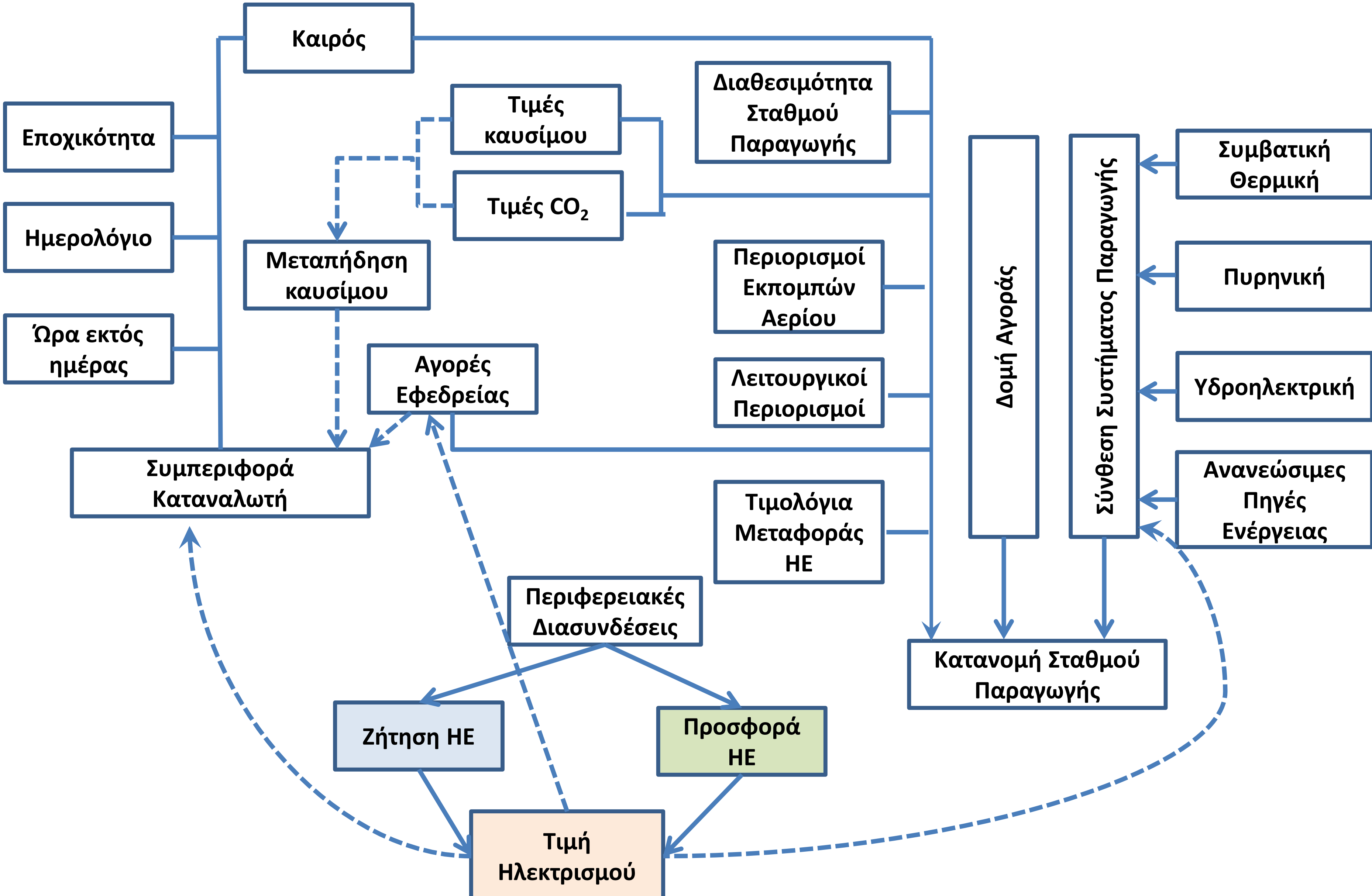
ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ , ΟΤΣ Η τιμή ισορροπίας Προσφοράς-Ζήτησης



A1 Οι Ηλεκτρικές Αγορές Ελλάδας και Ιταλίας



Θεμελιώδεις παράγοντες διαμόρφωσης τιμής στις Ηλεκτρικές Αγορές



Θεμελιώδη Χαρακτηριστικά των **Αγορών Εμπορευμάτων** (συμπεριλαμβανομένων των Ενεργειακών Αγορών) → Strong Impact → Συμπεριφορά τιμών

Τυπικά Χαρακτηριστικά (stylized facts)

Αντιστροφή της τιμής στη μέση τιμή (mean-reversion)

- Οι τιμές ταλαντώνονται γύρω από μία τιμή ισορροπίας, σταθερής μεσοπρόθεσμα, που ενδεχομένως μεταβάλλεται μακροπρόθεσμα

Εποχικότητα (reasonability)

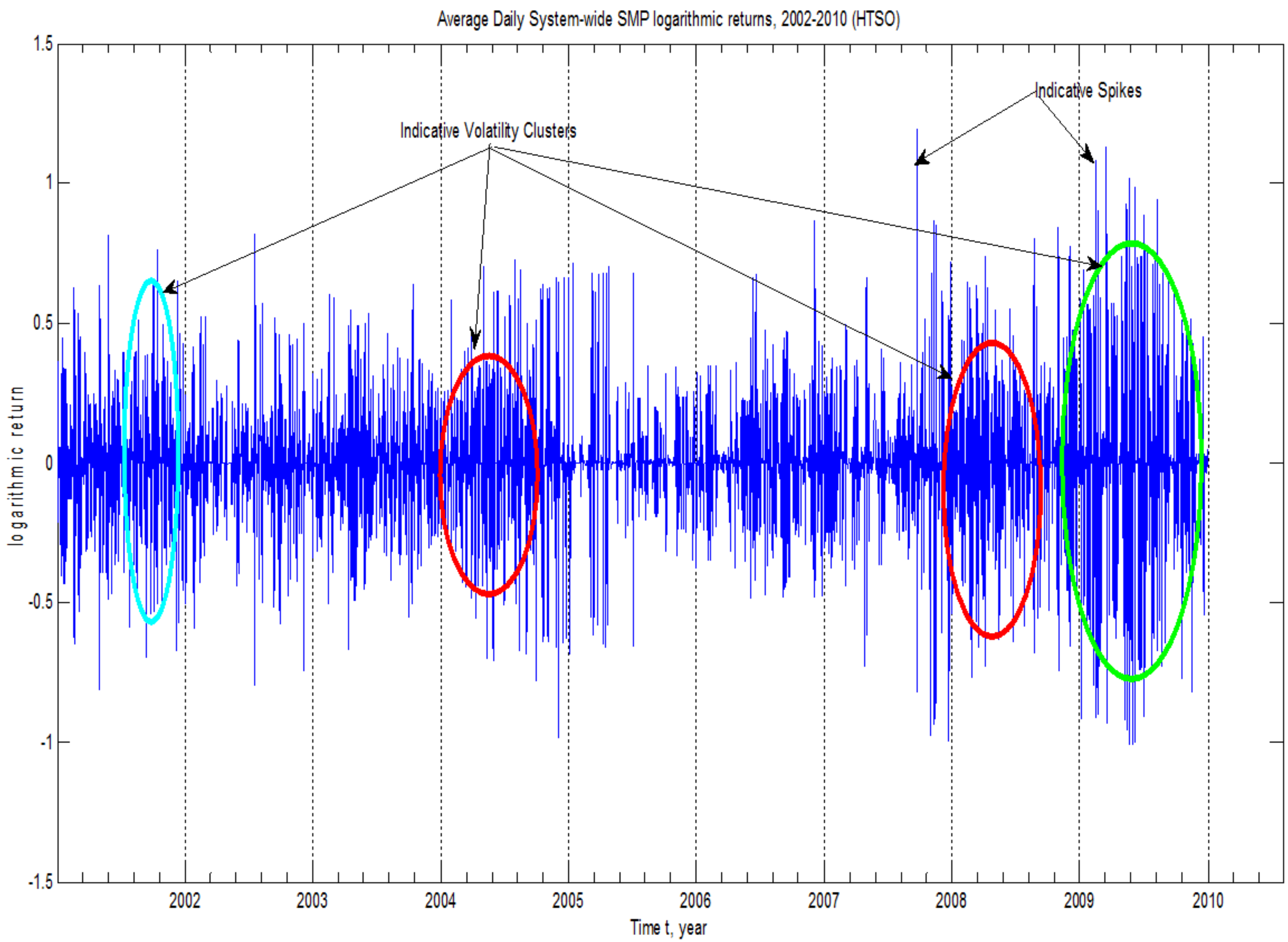
- Η ζήτηση ακολουθεί εποχικό μοτίβο
- Λόγω περιορισμών στην αποθήκευση, η εποχικότητα είναι παρούσα στις τιμές

Ακραίες τιμές (price spikes)

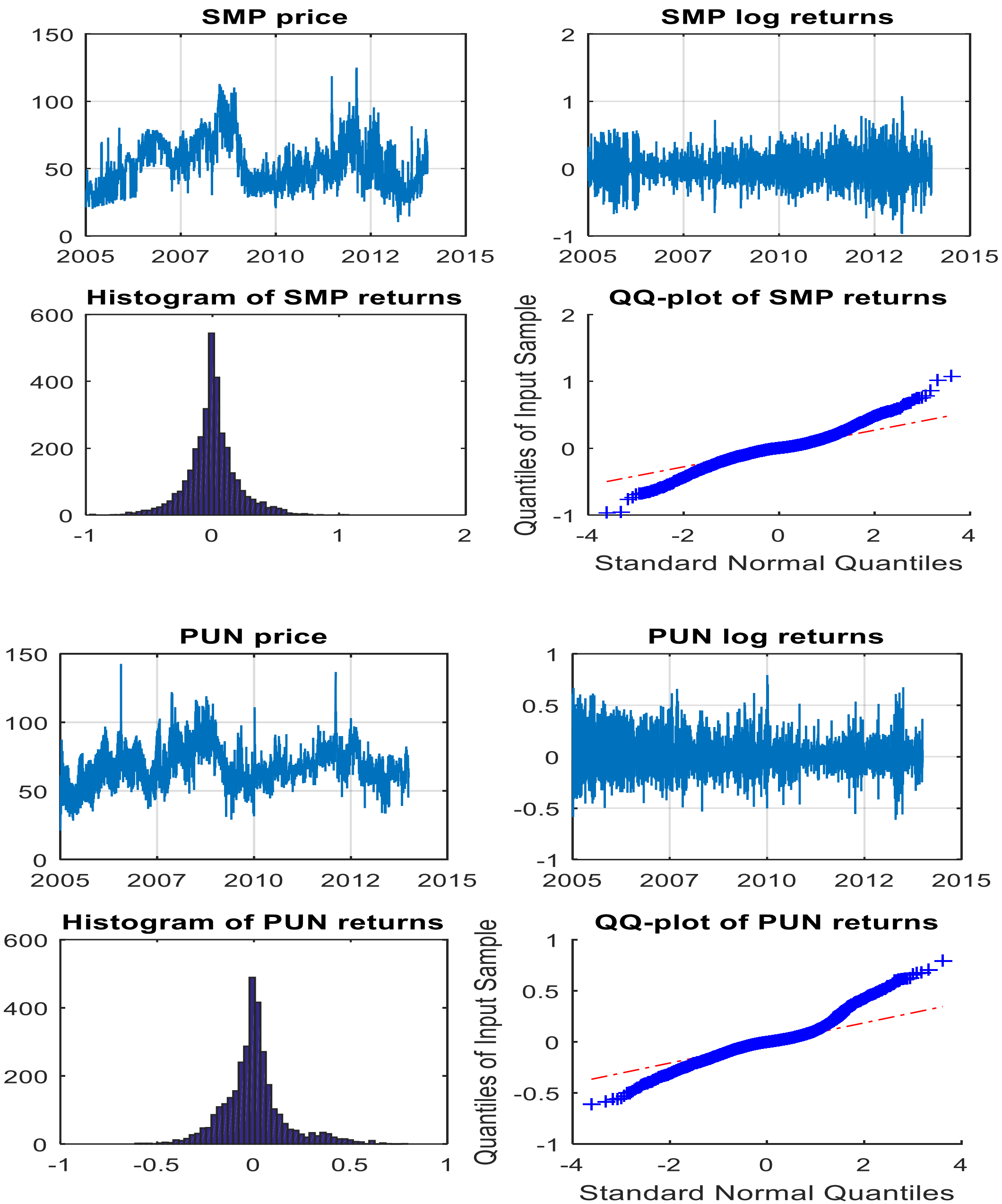
- Η ζήτηση είναι συνήθως ανελαστική στις τιμές.
- Σε περίπτωση περιορισμένης αποθηκευτικής ικανότητας, περιορισμοί στη διαθεσιμότητα του εμπορεύματος οδηγεί σε υψηλές Τιμές Χονδρικής (Spot)

Συσσωμάτωση Μεταβλητότητας (Volatility Clustering)

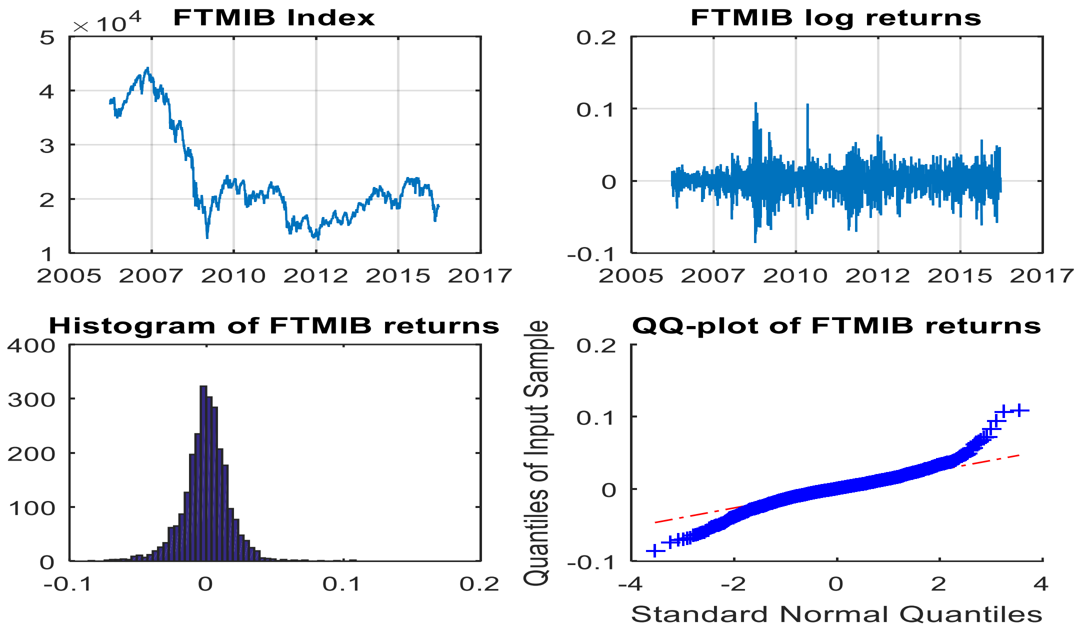
Α5 Ιδιαιτερότητες των τιμών spot Ηλεκτρισμού, σύγκριση με τιμές Χρηματοοικονομικών Αγορών

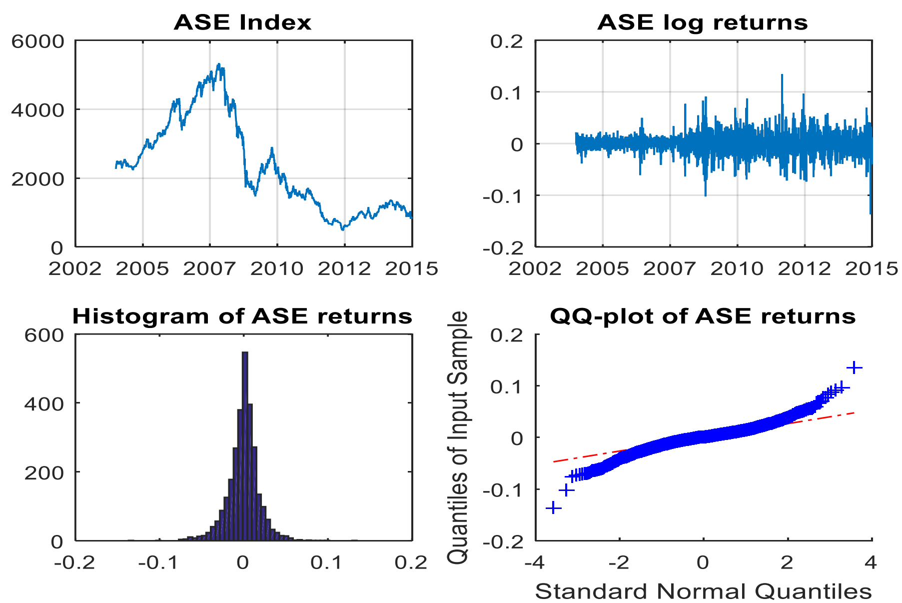


A2 Τιμές Χονδρικής (SPOT) SMP και PUN



A3 Τιμές Γενικού Χρηματιστηριακού Δείκτη ASE (Ελλάδας) και FTMIB (Ιταλίας)





A4 **Περιληπτική Στατιστική, έλεγχοι κανονικότητας, στασιμότητας κλπ**

	SMP	PUN	ASE	FTMIB
min	-0.97	-0.61	-0.14	-0.09
max	1.07	0.79	0.13	0.11
Mean	0.0003	0.0003	-0.0004	-0.0003
St.dev	0.1989	0.1608	0.0187	0.017
Skewness	0.1408	0.6825	-0.168	-0.0552
Kurtosis	5.3239	5.323	7.3821	6.660
25% percentile	-0.74	-0.56	-0.07	-0.07
75% percentile	0.78	0.67	0.09	0.08
Size	3286	3286	2839	2534

Έλεγχος ADF για unit-root στις Τιμές και Αποδόσεις

Μέσω του ελέγχου αυτού ελέγχεται εάν η τιμή $\{P_t\} = y_t$ ικανοποιεί την προϋπόθεση για Τυχαίο Περίπατο. Η **υποκείμενη υπόθεση** της διαδικασίας RW (Τυχαίου Περιπάτου), υποθέτει ότι οι συνεχώς σύνθετες (continuously compounded) **αποδόσεις μονής περιόδου**, είναι **τυχαίος περίπατος** και **ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανεμημένες** (iid) (RW1). Θεωρούμε τις αποδόσεις ως:

$$\boxed{r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln P_t - \ln P_{t-1}}$$

δηλαδή ως **συνεχώς σύνθετες**.

H_0 : the series is **unit-root process.**

Γενικό μοντέλο:

$$y_t = c + \Phi y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + \beta_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Υπό μηδενική υπόθεση H_0: $\Phi = 1$

$$y_t = c + y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + \beta_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t \ ,$$

H_1 εναλλακτικό μοντέλο: $\Phi \neq 1$

$$y_t = c + \delta t + \Phi y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \beta_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + \beta_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t$$

όπου c: συντελεστής ολίσθησης (drift coefficient)

δ: ντετερμινιστική τάση (deterministic trend)

Φ: AR(1) συντελεστής, $\Phi < 1$

Πίνακας : Αποτελέσματα ελέγχ ADF για SMP (Ελλάδα) και PUN (Ιταλία)

	smp (Greece)		pun (Italy)	
	Price	Returns	Price	Returns
• ADF statistics	-0.875	-27.0	-1.52	-26.47
• p-value	0.3313	0.000	0.1208	0.000
• # of lags (by BIC)	7	7	7	7
• h=1 reject H_0, h=0 accept H_0	0, do not reject null	1, reject H_0	0, do not reject null	1, reject H_0
• Result	Unit-root	Trend-Stationary	Unit-root	Trend-Stationary

Αποτέλεσμα:

Σύμφωνα με το ADF test, τα αποτελέσματα συμφωνούν με τον ΤΠ (RW), επειδή η H_0 : unit-root, δεν μπορεί να απορριφθεί για τις χρονοσειρές των ***τιμών****, ενώ* ***απορρίπτεται*** *(με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης >99%) για τις αποδόσεις (returns). Οι χρονοσειρές των τιμών εμφανίζονται να είναι* ***ολοκληρώσιμες (integrated) τάξης (1) (difference stationary)****, μία προϋπόθεση για ΤΠ (RW).*

Ο Έλεγχος Engle ή ARCH για ύπαρξη Ετεροσκεδαστικότητας (heteroskedasticity) στα κατάλοιπα (residuals)

- Στην περίπτωση που στη χρονοσειρά παρατηρούνται **συστάδες μεταβλητότητας (Volatility Clusters)**, τα αποτελέσματα ελέγχου ΕΜΗ ενδεχομένως να μην είναι έγκυρα.
- Για να αποφευχθεί ένα τέτοιο σφάλμα, ελέγχουμε την ύπαρξη **δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας (conditional heteroskedasticity)** στις **αποδόσεις**, μέσω του ελέγχου ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) του Engle (1995).
  H_0: δεν υπάρχουν επιδράσεις δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας στη χρονοσειρά.

Συμπέρασμα:

Η επίδραση ετεροσκεδαστικότητας πρέπει να αφαιρεθεί από τις αποδόσεις και των δύο αγορών. Τα «καθαρά» κατάλοιπα (residuals) είναι αυτά που χρησιμοποιούνται στον έλεγχο της Υπόθεσης Αποτελεσματικότητας Αγοράς, ΥΑΑ (ΕΜΗ).

	SMP returns	PUN returns
ARCH(1) statistic	319.62	80.595
pValue	0.000	0.000
cValue	6.63	6.63
Optimum # lags (by AIC)	1	1
h	1 , απόρριψη της H_0	1 , απόρριψη της H_0
Αποτέλεσμα	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα

A4 Περιληπτική Στατιστική, έλεγχοι κανονικότητας, στασιμότητας κλπ

	SMP returns					PUN returns				
	h	p	stat.	critical value	result	h	p	stat.	critical value	result
Α. Έλεγχοι Κανονικότητας										
JB - Jarque-Bera	1	0,000	750	5,97	not normal	1	0,000	994.3	5.975	not normal
KS - Kolmogorov-Smirnov	1	0,000	0.324	0.026	not normal	1	0,000	0.358	0.0236	not normal
Β. Έλεγχοι Στασιμότητας - Unit Root										
LMB - Leybourne-McCale	0	0,100	0.017	0.146	Στάσιμη σε τάση	0	0,1	0.0021	0.146	Στάσιμη σε τάση
KPSS	0	0,100	0.017	0.146	Στάσιμη σε τάση	0	0,1	0.0022	0.146	Στάσιμη σε τάση
ADF Unit-Root	1	0,000	-26.47	-1.946	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)	1	0,000	-27.0	-1.9416	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)
PP - Phillips-Perron Unit-Root	1	0,000	-79.68	-1.946	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)	1	0,000	-70.0	-1.9416	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)
Γ. Έλεγχοι Σειριακής Συσχέτισης										
LBQ - Ljung Box Q-test	1	0,000	903.6	31.41	Υπάρχει Σειριακή Συσχέτιση	1	0,000	2569	31.41	Υπάρχει Σειριακή Συσχέτιση
Δ. Έλεγχος Τυχαίου Περιπάτου (Random Walk Test)										
Variance Ratio Test, VRT	1	0,000	-33.5	1.96	Δεν είναι RW	1	0,000	-27.81	1,96	Δεν είναι RW
Runs Test	0	0,088	2232	—	Είναι RW	1	0,000	2106	—	Δεν είναι RW
E. Engle's ARCH effect σε Raw-Data	1	0,000	319.7	6.635	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Άρα volatility clustering. Ανάγκη για GARCH	1	0,000	86.45	6.635	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Άρα volatility clustering. Ανάγκη για GARCH
Ζ. Έλεγχος RW πάνω σε Clean-Data residuals GARCH(1,1)	1	0,000	-32.17	1,96	Δεν είναι RW	1	0,000	-25.8	1,96	Δεν είναι RW

A4 Περιληπτική Στατιστική, έλεγχοι κανονικότητας, στασιμότητας κλπ

	FTMIB returns					ASE returns				
	h	**p**	**stat.**	**critical value**	**result**	**h**	**p**	**stat.**	**critical value**	**result**
Α. Έλεγχοι Κανονικότητας										
JB - Jarque-Bera	1	0,000	1386	5.969	not normal	1	0,000	2285	5.969	not normal
KS - Kolmogorov-Smirnov	1	0,000	0,475	0,027	not normal	1	0,000	0,473	0,0254	not normal
Β. Έλεγχοι Στασιμότητας - Unit Root										
LMB - Leybourne-McCale	0	0,100	0,0492	0.1460	Στάσιμη σε τάση	1	0,024	0,1776	0.146	Μη-στάσιμη
KPSS	0	0,100	0,049	0.1460	Στάσιμη σε τάση	1	0,0251	0,1759	0.146	Μη-στάσιμη
ADF Unit-Root	1	0,000	-17,58	-1.9416	Δεν έχει Unit-Root (άρα στάσιμη)	1	0,000	-17,96	-1.9416	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)
PP - Phillips-Perron Unit-Root	1	0,000	-51,6	-1.9419	Δεν έχει Unit-Root (άρα στάσιμη)	1	0,000	-49,42	-1.9416	Δεν έχει Unit-Root (στάσιμη)
Γ. Έλεγχοι Σειριακής Συσχέτισης										
LBQ - Ljung Box Q-test	1	0,000	45,71	34,41	Υπάρχει Σειριακή Συσχέτιση	1	0,000	49.266	31,41	Υπάρχει Σειριακή Συσχέτιση
Δ. Έλεγχος Τυχαίου Περιπάτου (Random Walk Test)										
Variance Ratio Test, VRT	1	0,000	-25,21	1,96	Δεν είναι RW	1	0,000	-23,61	1,96	Δεν είναι RW
Runs Test	0	0,619	1686	—	Είναι RW	0	0,1636	1846	—	Είναι RW
Ε. Engle's ARCH effect σε Raw-Data	1	0,000	79,72	6.635	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Άρα volatility clustering. Ανάγκη για GARCH	1	0,000	33,46	6.6351	Υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Άρα volatility clustering. Ανάγκη για GARCH
Ζ. Έλεγχος RW πάνω σε Clean-Data residuals GARCH(1,1)	1	0,000	-25,89	1,96	Δεν είναι RW	1	0,000	-24,13	1,96	Δεν είναι RW

Το πλαίσιο στο οποίο 'ζουν' οι Στοχαστικές Μεταβλητές, Διαδικασίες που περιγράφουν τις Χρηματαγορές (financial markets) , αγορές εμπορευμάτων (Commodities) κλπ

Ορισμός Martingale

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω T ένας θετικός αριθμός και έστω $\mathcal{F}(t),\ 0 \le t \le T$, μία διήθηση (filtration) των υπο-αλγεβρών σ (sub- σ-algebras) του $\mathcal{F}$. Θεωρούμε την **προσαρμοσμένη (adapted)** διαδικασία $M(t),\ 0 \le t \le T$

α) εάν $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s) = M(s)]$ για όλα τα $0 \le s \le t \le T$ καλούμε τη διαδικασία αυτή ένα **Martingale.** **Δεν έχει τάση ανόδου ή καθόδου.**

β) εάν $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s) \ge M(s)]$ για όλα τα $0 \le s \le t \le T$ καλούμε τη διαδικασία αυτή ένα **submartingale.** **Δεν έχει τάση καθόδου.** **Μπορεί** να έχει μία τάση **ανόδου.**

γ) εάν $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s) \le M(s)]$ για όλα τα $0 \le s \le t \le T$ καλούμε τη διαδικασία αυτή ένα **supermartingale.** **Δεν έχει τάση ανόδου.** **Μπορεί** να έχει μία τάση **καθόδου.**

Το πλαίσιο στο οποίο 'ζουν' οι Στοχαστικές Μεταβλητές, Διαδικασίες που περιγράφουν τις Χρηματαγορές (financial markets) , αγορές εμπορευμάτων (Commodities) κλπ

Θεώρημα αναπαράστασης Martingale (μία διάσταση)

Έστω $W(t),\ 0 \leq t \leq T$, μία **κίνηση Brown (BM)** στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και έστω $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ η **διήθηση (filtration)** που παράγεται από αυτήν την κίνηση Brown. Έστω $M(t),\ 0 \leq t \leq T$ ένα Martingale ως προς τη διήθηση αυτή (δηλ., για κάθε t, $M(t)$ είναι $\mathcal{F}(t)$ −μετρήσιμη και για $0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s) = M(s)]$. Τότε υπάρχει μία **προσαρμοσμένη διαδικασία** (adapted process) $\Gamma(u), 0 \leq u \leq T$ τέτοια ώστε

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u)dW(u) \quad 0 \leq t \leq T$$

Το εν λόγω θεώρημα διασφαλίζει ότι η διήθηση είναι αυτή που δημιουργείται από την κίνηση Brown (δηλ. η μόνη πληροφορία στο $\mathcal{F}(t)$ είναι αυτή που προκύπτει παρατηρώντας τη BM μέχρι τη χρονική στιγμή t) τότε κάθε martingale ως προς τη διήθηση αυτή είναι μία **αρχική συνθήκη (initial condition)** συν το ολοκλήρωμα Ito ως προς την κίνηση Brown.

Το πλαίσιο στο οποίο ‘ζουν’ οι Στοχαστικές Μεταβλητές, Διαδικασίες που περιγράφουν τις Χρηματαγορές (financial markets) , αγορές εμπορευμάτων (Commodities) κλπ

Ορισμός

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω T ένας θετικός αριθμός και έστω $\mathcal{F}(t),\ 0 \leq t \leq T$, μία **διήθηση (filtration) των υπο-αλγεβρών σ (sub- σ-algebras)** του $\mathcal{F}$. Θεωρούμε την **προσαρμοσμένη (adapted)** διαδικασία

$$X(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Υποθέτουμε ότι για όλα τα $0 \leq s \leq t \leq T$ και για κάθε μη αρνητική, Borel-μετρήσιμη συνάρτηση f, υπάρχει μία άλλη Borel-μετρήσιμη συνάρτηση g, τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}[f(X(t))|\mathcal{F}(s)] = g(X(s))$$

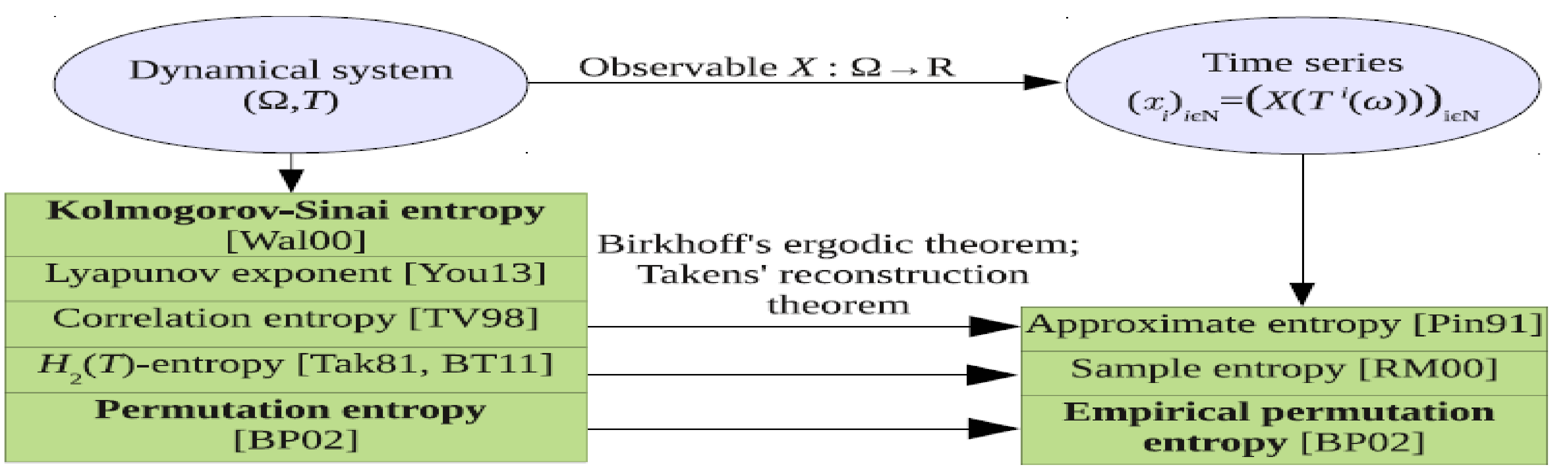
Τότε λέμε ότι η X είναι μία **διαδικασία Markov (Markov Process).**

Δυναμικά Συστήματα, Χρονοσειρές και Παρατηρήσεις

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα που ορίζεται από το ζεύγος (Ω, T) όπου Ω ένας **χώρος φάσεων (καταστάσεων)** που περιγράφει όλες τις δυνατές καταστάσεις του συστήματος, και T είναι μία **δυναμική** που περιγράφει πώς εξελίσσεται ένα σημείο $\omega \in \Omega$.

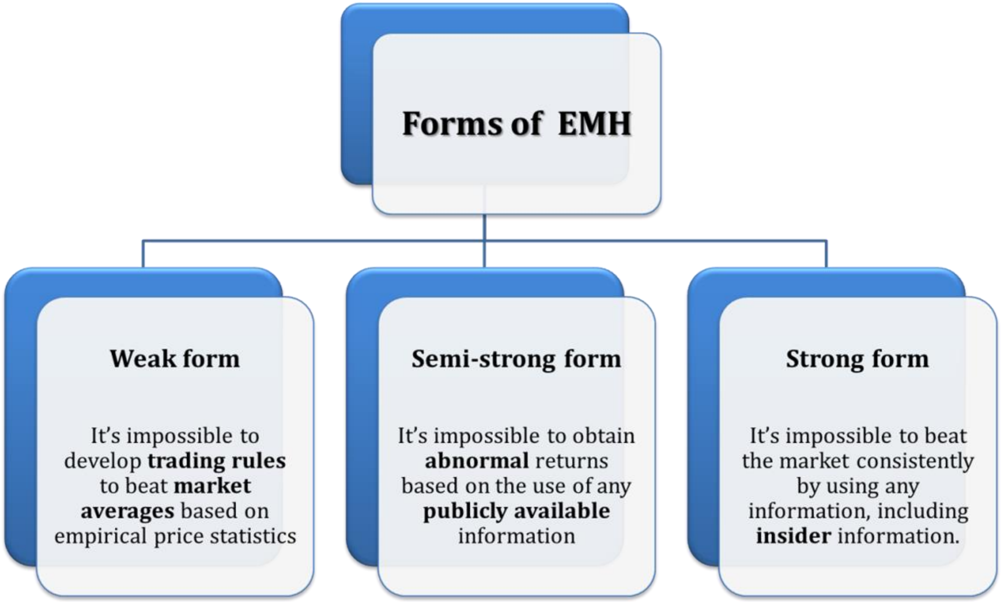
Η **πολυπλοκότητα** ενός δυναμικού συστήματος (Ω, T) χαρακτηρίζεται από τα ακόλουθα θεωρητικά μέτρα πολυπλοκότητας, μεταξύ των οποίων το πιο σημαντικό είναι η **εντροπία Kolmogorov-Sinai (KS).**

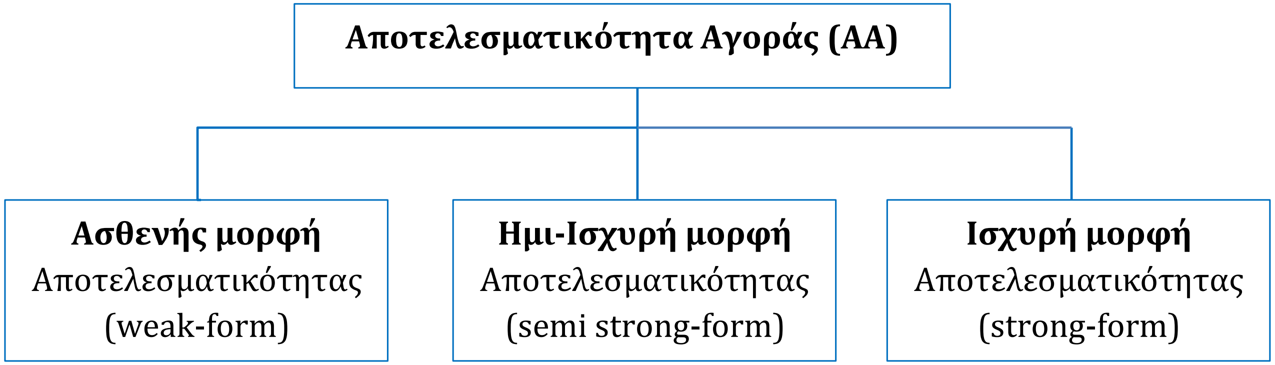
- Η **KS-Εντροπία** ή μετρική (metric) εντροπία ή measure-theoretic entropy, χονδρικά, μετράει τη **μη-προβλεψιμότητα** μίας δυναμικής. Η εντροπία **KS** είναι μία αναλλοίωτη (invariant) ενός δυναμικού συστήματος που διατηρεί το μέτρο (measure preserving).
- Ο **Εκθέτης Lyapunov** μετράει πώς δύο απειροελάχιστα κοντινά σημεία, από το χώρο φάσεων, μπορούν να απομακρυνθούν υπό την επενέργεια της δυναμικής. Λόγω του θεωρήματος του Pesin και της ανισότητας του Ruelle, σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε ή να «φράξουμε» την εντροπία KS μέσω του εκθέτη Lyapunov.
- **Η H_2(T)- εντροπία** και η **εντροπία συσχέτισης** (Takens et al., 1998, Nonlinearity, 11)
- **Η sample entropy** (Richman-Moorman, 2000)
- **Η permutation entropy** (Bandt et al., 2002) πολύ κοντά στην KS εντροπία
- **Η Approximate Entropy** του Pincus, 1991



A scheme of measuring complexity from time series

B1 Αποτελεσματικές Αγορές και η Υπόθεση Αποτελεσματικών Αγορών (Efficient Market Hypothesis, EMH).





Υπόθεση Αποτελεσματικών Αγορών (Efficient Market Hypothesis, EMH)

- **Ασθενής μορφή:** συναντάται σε μία αγορά που ενσωματώνει πλήρως τις **ιστορικές** κινήσεις της τιμής (αποδόσεις), στις **μελλοντικές** τιμές.
  - Οι αποδόσεις **πρέπει** να είναι μεταξύ τους **σειριακά ανεξάρτητες** στο χρόνο. Στην αντίθετη περίπτωση, οι «παίκτες» της αγοράς θα μπορούν να αποκομίζουν κέρδη μέσω της πρόβλεψης των μελλοντικών τιμών με βάση τις ιστορικές τιμές.
  - Η αδύνατη μορφή αποτελεσματικότητας της αγοράς συνήθως συγκρίνεται με το **μοντέλο τυχαίου περιπάτου, ΤΠ (Random Walk model, RW).**

- **Ημι-Ισχυρή μορφή:** επιπλέον των ιδιοτήτων μίας αδύνατα αποτελεσματικής αγοράς, οι τιμές επίσης **αντανακλούν όλη** τη **δημόσια (διαθέσιμη) πληροφορία.**
  - Δεν υπάρχει δυνατότητα στους επενδυτές να επιτύχουν **υπερβάλλουσες αποδόσεις** (excess returns), ούτε μέσω της ανάλυσης ιστορικών ή άλλης δημόσια διαθέσιμης πληροφορίας.

  - ***Συμπέρασμα:*** ***Α***κόμη και η **θεμελιώδης ανάλυση ΔΕΝ** θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προκαλέσει **«αφύσικα» κέρδη από την αγορά.**

- **Ισχυρή μορφή:** το **υψηλότερο** επίπεδο αποτελεσματικότητας το οποίο είναι αδύνατο, στον πραγματικό κόσμο, να επιτευχθεί.
  - Εδώ, οι τιμές αντανακλούν **ΟΛΗ** τη διαθέσιμη πληροφορία, συμπεριλαμβανομένης της **εσωτερικής πληροφορίας** (insider information).
  - Δεν μπορούν να υπάρχουν υπερβάλλουσες αποδόσεις, ακόμη και στην περίπτωση **ποιοτικά ανώτερης πληροφορίας,** επειδή αυτή **ήδη έχει ενσωματωθεί** στην τιμή.

Υποθέσεις για αδύνατη μορφή αποτελεσματικότητας

A - Ορθολογικές προσδοκίες (Rational Expectations) (Muth, 1961).

Οι τιμές συμπεριφέρονται τυχαία.

$$P_{t+1} = \mathbb{E}_t[P_{t+1}] + \varepsilon_{t+1}$$

όπου $\mathbb{E}_t[P_{t+1}]$ είναι η αναμενόμενη τιμή P_{t+1} τη στιγμή t και ε_{t+1} το σφάλμα πρόβλεψης.

$$\mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+1}] = \mathbb{E}_t[P_{t+1} - \mathbb{E}_t[P_{t+1}]] = 0$$

Η αναμενόμενη τιμή της τιμής, τη στιγμή $t+1$ είναι αμερόληπτη (unbiased) και το σφάλμα πρόβλεψης ***"[…] must be uncorrelated with the entire set of information that is available to the forecaster at the time the prediction is made"***, δηλ. το σφάλμα θα πρέπει να είναι σειριακά ασυσχέτιστο για όλα τα lags και leads.

Υποθέσεις για αδύνατη μορφή αποτελεσματικότητας

B- Διαδικασία Martingale

Martingale: ένα από τα παλαιότερα **μοντέλα αποτίμησης περιουσιακού στοιχείου (asset pricing model)** (Cardano, 1565).
Σχετίζεται με την έννοια του **δίκαιου παιγνίου.**
Ορίζεται ως μία στοχαστική διαδικασία, όπου

$$\mathbb{E}_t[P_{t+1}|P_t, P_{t-1}, \ldots] = P_t$$

Εάν P_t είναι τα **αθροιστικά κέρδη**, τη στιγμή t από το παίξιμο ενός **παιγνίου τύχης**, τότε αυτό είναι δίκαιο εάν το αναμενόμενο «κέρδος» τη επόμενη στιγμή $t+1$ θα είναι ίδιο με το «κέρδος» τη στιγμή t, δεδομένων των κερδών όλων των προηγούμενων περιόδων (αθροιστικά).

Εάν P_t είναι η τιμή του asset τη στιγμή t, τότε, σύμφωνα με την **υπόθεση Martingale**, η καλύτερη πρόβλεψη για την **αυριανή** τιμή είναι η **σημερινή** τιμή.
Μη επικαλυπτόμενες (non-overlapping) μεταβολές τιμής είναι **ασυσχέτιστες** σε όλα τα lags και leads (Campbell κ.α., 1997).

Γ- Η Υπόθεση Τυχαίου Περιπάτου (ΥΤΠ) (Random Walk Hypothesis, RWH)

Η ΥΤΠ αποτελεί τη βάση όλων των μοντέρνων μοντέλων περιγραφής της δυναμικής των αποδόσεων τιμής.
Η υπόθεση «πηγάζει» από την έννοια του Martingale, του οποίου ενσωματώνει τις κύριες υποθέσεις και ορίζεται ως: **μία στοχαστική διαδικασία της οποίας η τροχιά γίνεται από διαδοχικά τυχαία βήματα.**

Τρεις μορφές ΥΤΠ:

RW1 :

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \varepsilon_t \ , \quad \varepsilon_t \quad \sim]][D(0, \sigma^2)$$

P: η τιμή, μ: ολίσθηση (drift) και ε_t: σφάλμα, ή στοιχειώδης μεταβολή (increment) κατανεμημένο **ομοιόμορφα** με μέση τιμή μηδέν (0) και διακύμανση σ^2.

Η υπόθεση των ***ανεξάρτητων*** στοιχειωδών μεταβολών, καθιστούν την RW1 όχι μόνο ένα δίκαιο παίγνιο, αλλά συνεπάγεται επίσης ότι **κάθε μη-γραμμική συνάρτηση** ε_t είναι **ασυσχέτιστη (Campbell κ.α., 1997), αρα αδυναμία πρόβλεψης.**

RW2 :

Στην πράξη είναι **τελείως απλοϊκό** να υποθέσουμε ότι η πιθανοτική κατανομή των αποδόσεων (των μετοχών) παραμένει **αναλλοίωτη** για κάθε μακρές χρονικές περιόδους.
Άρα η RW2 «ανακουφίζει» την υπόθεση της κατανομής της RW1 και ορίζει ένα ΤΠ ως: *μία διαδικασία όπου οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες αλλά **ΟΧΙ ομοιόμορφα** κατανεμημένες (INID).*
Η RW2 διατηρεί την ιδιότητα της μη-προβλεψιμότητας της RW1 αλλά επιτρέπει τη **μη δεσμευμένη (unconditional) ετεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity),** δηλ. την ***εξάρτηση της μεταβλητότητας απο τον χρόνο***.

RW3 :

Λόγω των χαρακτηριστικών των πραγματικών αποδόσεων, **είναι τελικώς αδύνατο να βρούμε μία πραγματική διαδικασία τιμής που σέβεται τις αυστηρές υποθέσεις της RW1 ή ακόμη της RW2.**
*Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, οι εμπειρικές μελέτες βασίζονται σε μία **γενικότερη μορφή** του ΤΠ (RW) η οποία **«απεμπολεί»** επίσης την υπόθεση της **ανεξαρτησίας*** στις στοιχειώδεις μεταβολές, ώστε να συμπεριλαμβάνει διαδικασίες **που ικανοποιούν μόνο την απαίτηση της μη-συσχέτισης.**
Στην παρούσα μελέτη, θεωρούμε ότι οι τιμές ακολουθούν την τελευταία και πιο γενική υπόθεση τυχαίου περιπάτου

B2, Έλεγχοι της Υπόθεσης Τυχαίου Περιπάτου (RW)

1. Σειριακή Αυτοσυσχέτιση (Serial Autocorrelation) και ο έλεγχος Ljung-Box

- Ένα από τα πρώτα βήματα πριν το έλεγχο της ΥΑΑ είναι ο έλεγχος για την ύπαρξη σειριακής αυτοσυσχέτισης στη χρονοσειρά των αποδόσεων.
- Σύμφωνα με την υπόθεση Τυχαίου Περιπάτου ((RW hypothesis), οι αποδόσεις **πρέπει** να είναι **ασυσχέτιστες** σε όλες τις χρονικές καθυστερήσεις (lags) και χρονικά προβαδίσματα (leads).
- Αυτή καθ' αυτή η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης αποτελεί ήδη ένδειξη **προβλεψιμότητας** των αποδόσεων, δηλ. **ανεπάρκειας** της αγοράς.
- Ο **συντελεστής αυτοσυσχέτισης**, σε lag k είναι

$$\rho(k) = \frac{Cov(r_t, r_{t+k})}{\sqrt{var(r_t)}\sqrt{var(r_{t+k})}}$$

  Εάν $\rho(k) \approx 0$ για κάθε $k > 0$, τότε οι αποδόσεις είναι **τελείως ασυσχέτιστες.**
- Η Στατιστική Ljung-Box (1978) ελέγχει εάν οι αυτοσυσχετίσεις μέχρι m χρονικές καθυστερήσεις είναι διαφορετικές από μηδέν.

$$Q_m \equiv T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho^2(k)}{T-k}$$

όπου T μέγεθος δείγματος, και $Q_m \sim X^2(m)$.

- Η μηδενική υπόθεση είναι H_0: οι αποδόσεις **δεν** έχουν σειριακή αυτοσυσχέτιση. Η απόρριψη της H_0 σημαίνει την **απόρριψη της υπόθεσης τυχαίου περιπάτου (RW).**

Ο Έλεγχος Ροών (Runs Test) .

Ανιχνεύει τη **γραμμική εξάρτηση (linear dependence)** στις μεταβολές της τιμής ελέγχοντας την **συχνότητα** συγκεκριμένων **επαναληπτικών μοτίβων**, μέσα στη χρονοσειρά.

Ο έλεγχος ροών είναι ένας **μη-παραμετρικός** έλεγχος για το **πώς κατανέμονται οι διαδοχικές αρνητικές και θετικές** στοιχειώδεις μεταβολές η **Ροές (runs).** Η πραγματική κατανομή στη συνέχεια συγκρίνεται με αυτήν ενός ΤΠ, με ίδιο αριθμό παρατηρήσεων.

Σε περίπτωση που το δείγμα μιας διαδικασίας είναι τυχαίο τότε ο αριθμός των ροών δεν πρέπει να είναι ούτε πολύς ούτε λίγος.

Εστω ότι τα πρόσημα στις αποδόσεις θέτονται ως εξής :
Εάν returns > μέση τιμή (mean) ⇒ (+), εάν returns < μέση τιμή ⇒ (-)
Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει **χρονική ολίσθηση (drift)** στη μέση τιμή.

Μια ροή ορίζεται ως μία ***μη- διακοπτόμενη ακολουθία του ίδιου πρόσημου η μοτίβου*** των αποδόσεων της σειράς.

Εστω σειρά παρατηρήσεων- αποδόσεων με τα εξής πρόσημα

+ + **-** **+** **- - -** **+ +** **-**

Εχουμε 6 ροές, εναλλαγές (+) και (-) : 3 ροές θετικών και 3 ροές αρνητικών αποδόσεων .

- **Μηδενική υπόθεση**: H_0 : η κατανομή αποδόσεων με **ίδιο πρόσημο** είναι η **ίδια** με αυτήν ενός **τυχαίου περιπάτου.**
  - Ο αριθμός ακολουθιών αποδόσεων με **ίδιο πρόσημο** θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν κοντύτερα στον **προσδοκώμενο** αριθμό ακολουθιών που προκύπτει από ΤΠ.
- Έστω P_+ και P_-, αντίστοιχα, ο αριθμός θετικών και αρνητικών αποδόσεων σε ένα δείγμα N παρατηρήσεων. Τότε ο ΤΠ (RW) έχει ως **αναμενόμενο αριθμό ροών** (runs) R

$$\mathbb{E}[R] = \frac{N + 2P_+P_-}{N}$$

με διακύμανση

$$\sigma^2(R) = \frac{2P_+P_-(2P_+P_- - N)}{N^2(N-1)}$$

Εάν N αρκετά μεγάλος αριθμός, οι αποδόσεις θα ακολουθούν προσεγγιστικά μία **κανονική κατανομή** με στατιστική ελέγχου

$$\boxed{Z = \frac{r - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{\sigma^2(R)}}}$$

Ο αριθμός των ροών R πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα

$$\mathbb{E}[R] - 1.96\,\sigma(R) \leq R \leq 1.96\,\sigma(R)$$

για επίπεδο εμπιστοσύνης α=0.05.

Παράδειγμα Runtest σε Matlab

$$[h, p, runs\_test] = runtest\,(data);$$

Για **αποδόσεις SMP (smpret)**

$h = 1 \Rightarrow$ η H_0 απορρίπτεται άρα οι αποδόσεις δεν ακολουθούν διαδικασία τυχαίου περιπάτου

$p = 0.0000$

$$nruns: 1869(R)$$
$$n1: 1618\ (P_+)$$
$$n0: 1668\ (P_-)$$
$$z: 7.84$$

Για **Random numbers** με μέση τιμή =0 και διακύμανση 1

$$R = rormrnd(0,1,2000,1) = data$$

$h = 0 \Rightarrow$ η H_0 δεν απορρίπτεται άρα R είναι random walk

$p = 0.4439$

$$nruns: 1622(R)$$
$$n1: 1653\ (P_+)$$
$$n0: 1634\ (P_-)$$
$$z: -0.7657$$

1. **Ο έλεγχος BDS** (Brock, Dechert & Scheinkman, 1987)

- Μη-παραμετρικός έλεγχος για ύπαρξη **σειριακής εξάρτησης (serial dependence)** και **μη-γραμμικής δομής** σε μία χρονοσειρά.
- Έστω διάνυσμα n-ιστορικών τιμών (χρονικών υστερήσεων) x_t^n, που ορίζεται ως

$$x_t^n = \{x_{t-n}, \dots, x_t\}$$

  όπου n η **διάσταση εμβύθισης (embedding dimension).** Η x_t^n **ανακατασκευάζει** την **τροχιά** του Δυναμικού Συστήματος (ΔΣ).
- Υπολογίζεται διαδοχικά το **ποσοστό των ζευγών** των σημείων του x_t^n που «γειτνιάζουν».

$$\boxed{C_{n,T}(k) = \frac{1}{T(T-1)} \sum_{i \neq j} I_{i,j,k}}$$

  όπου T μέγεθος δείγματος του x_t^n και $I_{i,j,k} = 1 \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \ \left\| x_i^n - x_j^n \right\| \leq k$ και 0 διαφορετικά.
- Η πιθανότητα σε ένα τυχαία επιλεγόμενο ζεύγος σημείων (n-histories) αυτά να γειτνιάζουν, δίνεται από το **Ολοκλήρωμα Συσχέτισης**, $C_{n,T}(k)$, δηλαδή το όριο της $C_{n,T}(k)$ καθώς το T αυξάνει.
- Ακόμη και στην περίπτωση που το k είναι πεπερασμένο, εάν η **χρονοσειρά είναι IID** τότε

$$\boxed{C_{n,k} \approx [C_1]^n \ \text{για κάθε } n.}$$

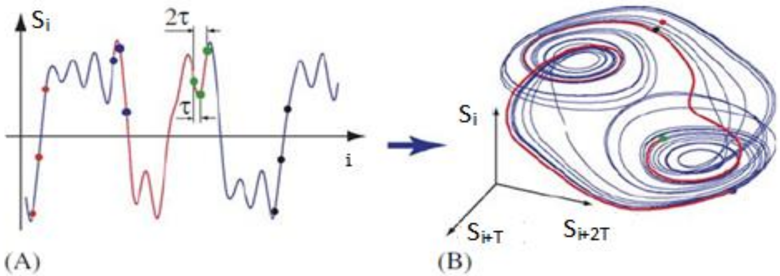
- Η **στατιστική BDS** ορίζεται ως:

$$J_{n,T}(k) \text{ ή } BDS(k) = \sqrt{T}\,\frac{C_{n,T}(k) - \left[C_{1,T}(k)\right]^n}{\hat{\sigma}_{n,T}(k)}$$

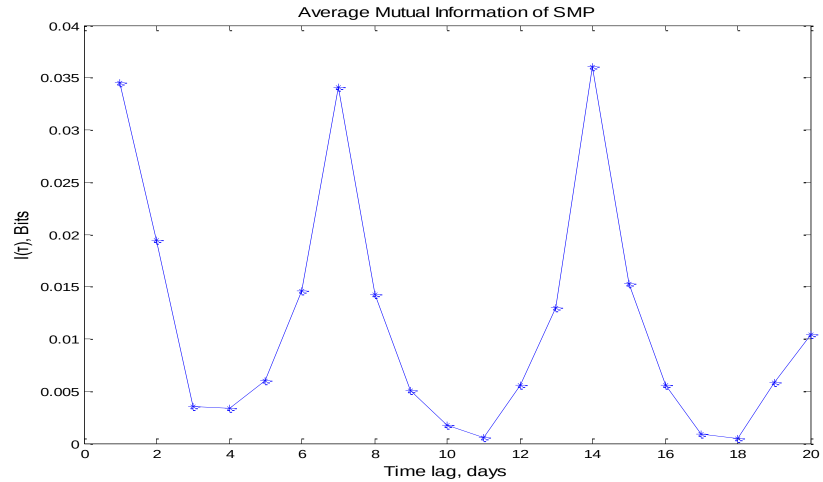
όπου $\hat{\sigma}_{n,T}(k)$ = η τυπική απόκλιση του $C_{n,T}(k) - \left[C_{1,T}(k)\right]^n$.

- Υπό την **υπόθεση τυχαίου περιπάτου (ΥΤΠ)**, η $J_{n,T}(k) \equiv BDS(k)$ **ασυμπτωτικά ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και έχει ως** H_0, **μηδενική υπόθεση, την i.i.d**
- Μία **απόρριψη** της H_0, i.i.d, αποτελεί ένδειξη της **μη-γραμμικής εξάρτησης (ή δομής)** στα δεδομένα.
  - Μία **θετική και σημαντική** τιμή της στατιστικής BDS δείχνει ότι **κάποια μοτίβα** εντός της ανακατασκευασμένης τροχιάς έχουν την πιθανότητα να **αναδυθούν πιο συχνά,** μία συμπεριφορά που δεν απαντάται σε τυχαία διαδικασία.
  - Αντίθετα, μία **αρνητική και σημαντική** τιμή της BDS δείχνει τη **μη-συχνή εμφάνιση κάποιων μοτίβων**, σε σύγκριση με μία τυχαία διαδικασία.

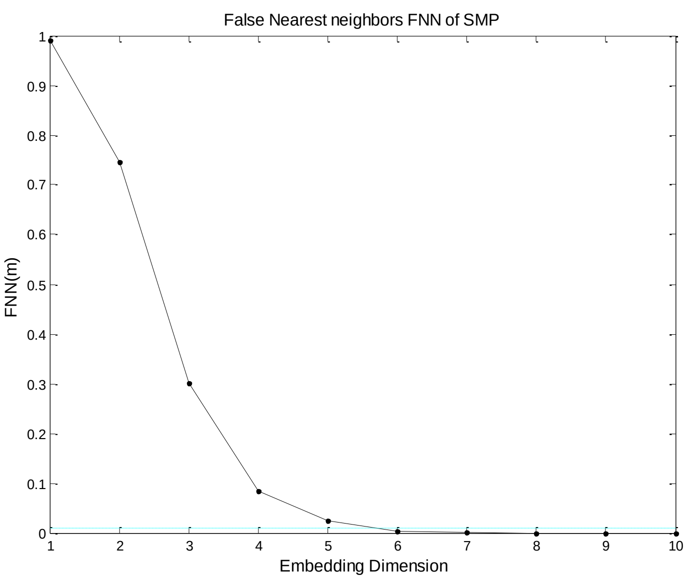
B2 Μέτρα (measures) (εργαλεία) Γραμμικής και Μη-Γραμμικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, για έλεγχο της ΕΜΗ

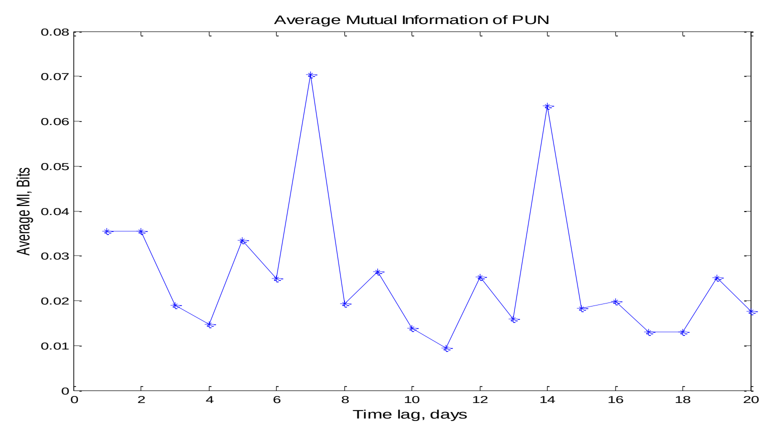


A pictorial representation of the phase space reconstruction

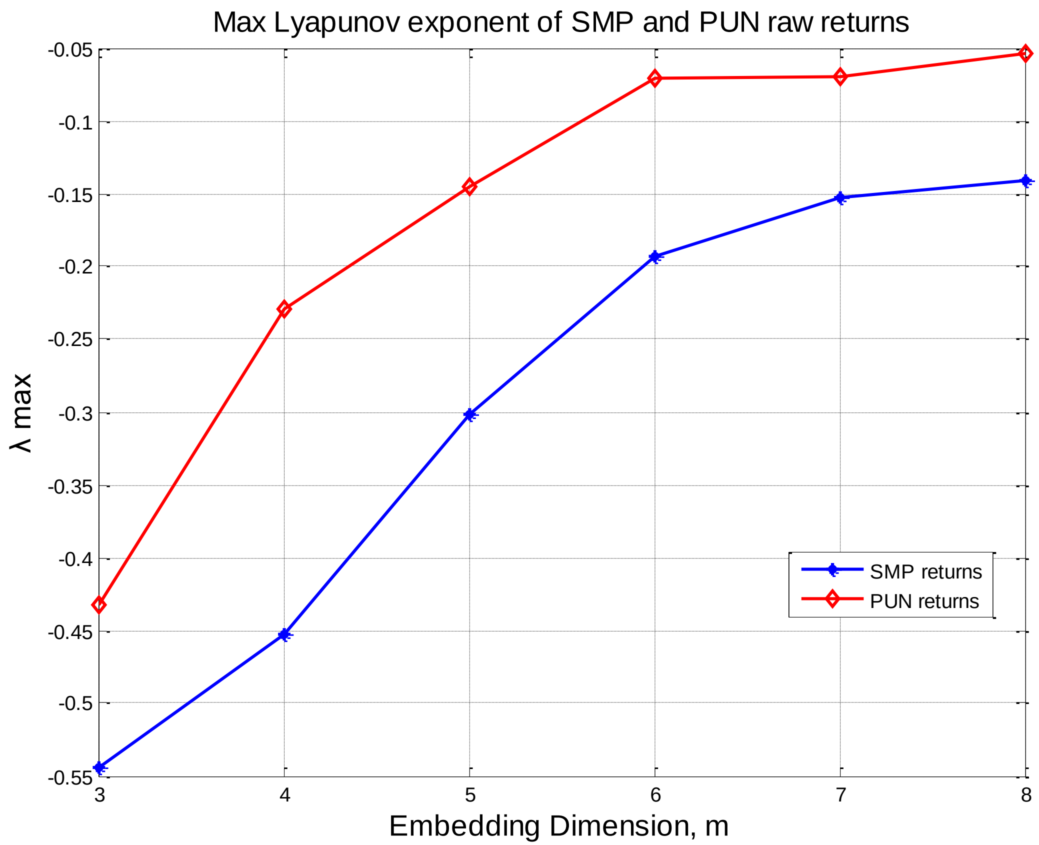


Average Mutual Information (AMI) of SMP returns. The first minimum is 4 days, lefining the time delay τ in the reconstruction vector by MOD.





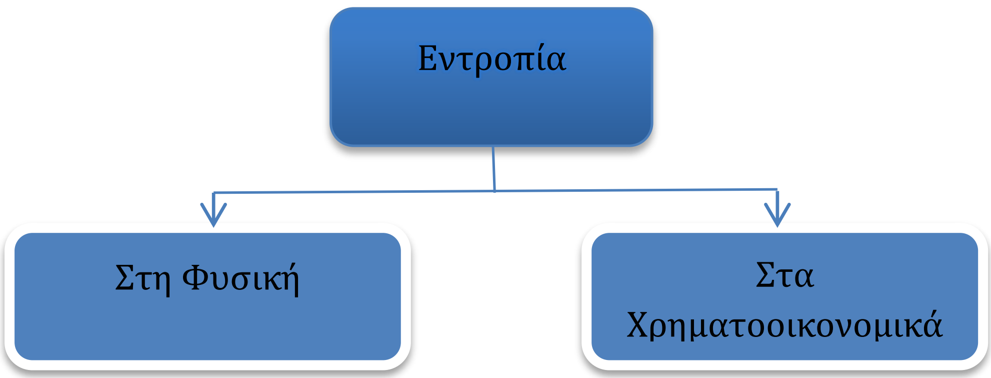
MI (AMI) of PUN returns. The first minimum is 4 days, defining the time delay τ in tion vector by MOD.



Max Lyapunov exponent of SMP and PUN raw returns
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
-0.4
-0.45
-0.5
-0.55
λ max
3
4
5
6
7
8
Embedding Dimension, m
SMP returns
PUN returns

Β2 Μέτρα (measures) (εργαλεία) Γραμμικής και Μη-Γραμμικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, για έλεγχο της ΕΜΗ

B2 ΕΝΤΡΟΠΙΑ



- Ποσοτικοποιημένη αναπαράσταση της **«αταξίας» (disorder)** ή **μέτρο αβεβαιότητας.**
- Μια σχέση ανάμεσα σε **Μακροσκοπικές** και **Μικροσκοπικές** ποσότητες, που περιγράφει τη διάχυση της ενέργειας.

Μία σχέση μεταξύ Μακροσκοπικών και Μικροσκοπικών ποσοτήτων που περιγράφουν το πώς ο αριθμός **καταστάσεων (states** ή **regimes)** σε μία αγορά «μεταφράζεται» σε μία κατανομή πιθανότητας της «συλλογικής» ψυχολογίας (του κλίματος) της αγοράς.

Προσεγγιστική Εντροπία (Approximate Entropy), ApEn (Pincus, 1991)

Ορισμός

- Έστω u μία ακολουθία αριθμών $u(1), \dots, u(N)$, μήκους N. Δεδομένου ενός μη-αρνητικού αριθμού $m, m \leq N$, σχηματίζουμε m-blocks των **υπο-ακολουθιών** $x(i) \equiv (u(i), u(i+1), \dots, u(i+m-1))$
- Η απόσταση μεταξύ δύο blocks μετράται ως εξής:

$$d(x(i), x(j)) \equiv \max_{k=1,2,\dots,m}(|u(i+k-1) - u(j+k-1)|)$$

  δηλαδή η **μέγιστη, ως προς σημείο (point-wise), διαφορά** μεταξύ των blocks.
- Δεδομένου ενός $r \in \mathbb{R}$, μετράμε για ένα δεδομένο block $x(i)$, το **ποσοστό** των blocks $x(j)$ που έχει μία απόσταση $< r$, και το ονομάζουμε $C_i^m(r)$.
- Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Heaviside Θ, η οποία μετράει τις φορές όπου η απόσταση d είναι μικρότερη από το Threshold(κατώφλι) r, ο τυπικός ορισμός είναι:

$$C_i^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{j=1}^{N-m+1} \Theta(r - d(x(i), x(j))) \tag{1}$$

$$\Phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^m(r) \tag{2}$$

Με βάση τη $\Phi^m(r)$ στη (2.27), η $ApEn$ ορίζεται ως

$$ApEn(m, r, N)(u) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)\,, \quad m \geq 0 \tag{3}$$

$$ApEn(0, r, N)(u) = -\Phi^1(r) \tag{4}$$

- Η $ApEn(m,r,N)$ είναι πάντοτε καλώς ορισμένη. Στη (1), όταν ένα ποσοστό του block είναι <1, η απόσταση του block από τον εαυτό του, $d(x_i, x_i)$, είναι πάντοτε μετρήσιμη. Άρα, $C_i^m(r) \geq 1$ και κατά συνέπεια ο λογάριθμος του $C_i^m(r)$ ποτέ δεν είναι μη ορισμένος.
- Η $ApEn$ μετράει το **πόσο κοντά** βρίσκονται συγκεκριμένα μοτίβα

$$
\begin{aligned}
-ApEn(m,r,N)(u) &= \Phi^{m+1}(r) - \Phi^{m}(r) \\
&= \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m} \log C_i^{m+1}(r) - \frac{1}{N-m+1}\sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^{m}(r) \\
&\approx \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m} \left(\log C_i^{m+1}(r) - \log C_i^{m}(r)\right) \\
&= \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m} \log\left(\frac{C_i^{m+1}(r)}{C_i^{m}(r)}\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Η τελευταία γραμμή της (5) , είναι ο μέσος όρος, για όλα τα m-blocks, του log της **δεσμευμένης πιθανότητας** $|u(j+m)-u(i+m)|<r$, δεδομένου του $|u(j+k)-u(i+k)|<r$ για όλα τα $k=0,1,\ldots,m-1$, άρα η $ApEn$ μετράει τη λογαριθμική πιθανότητα ότι ακολουθίες μοτίβων που είναι κοντά για m παρατηρήσεις, παραμένουν κοντά σε επόμενες συγκρίσεις. Η $ApEn$ μετράει **εμμονή (persistence), συσχέτιση (correlation) και κανονικότητα (regularity).** Εάν $C_i^{m+1}(r)=C_i^m(r)$ τότε $ApEn=0$, οπότε υπάρχει **σθεναρή σειριακή συσχέτιση.**

Μικρές τιμές της $ApEn$ αντιστοιχούν σε **υψηλότερη εμμονή και αυτοσυσχέτιση**. **Υψηλές** τιμές της $ApEn$ συνεπάγονται **χαμηλότερη εμμονή και πιο ανεξάρτητες παρατηρήσεις.**

Θεώρημα: για μία iid διαδικασία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, για κάθε m

$$ApEn(m, r) = -\int f(y) \cdot \log\left(\int_{z=y-r}^{z=y+r} f(z)dz\right) dy \tag{9}$$

Παράδειγμα: θεωρούμε τη διαδικασία AR(1)

$$X_k = \rho \cdot X_{k-1} + \epsilon_k \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{10}$$

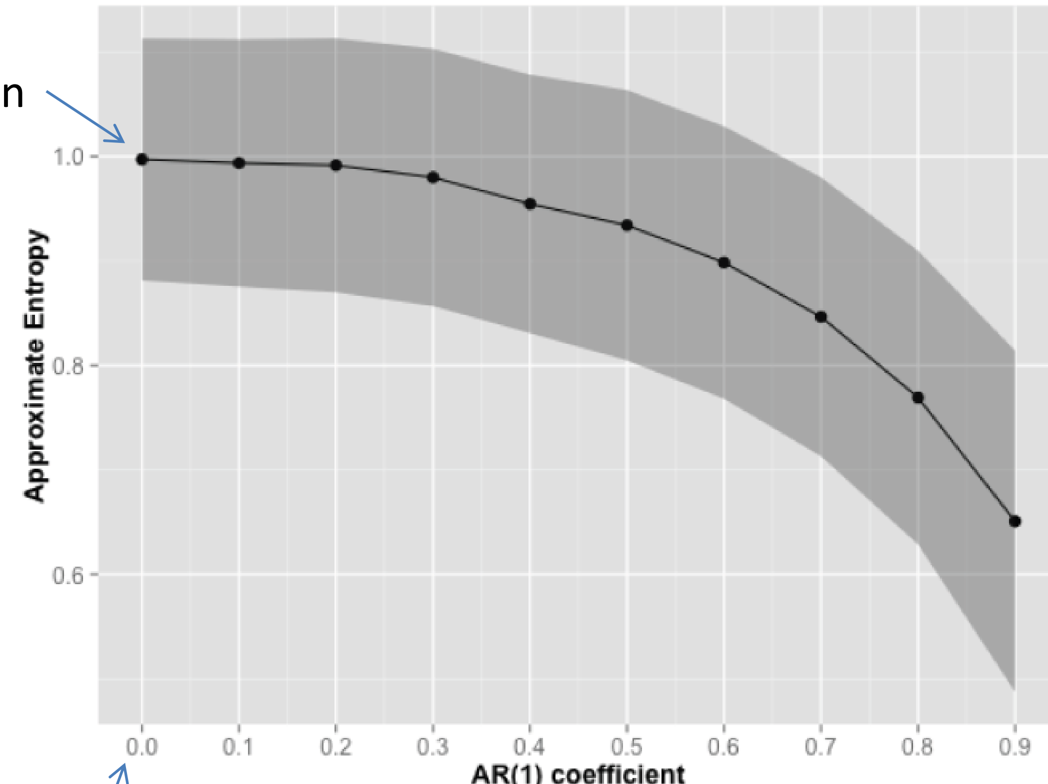
Για διαφορετικές τιμές $\rho = 0, 0.1, \ldots, 0.9$ κάνουμε μία προσομοίωση Monte Carlo, 1000 διαδρομών μήκους 200 η κάθε μία. Στο Σχήμα απεικονίζεται η $ApEn$ με το τυπικό σφάλμα υπολογισμού της.

Για **υψηλότερες** τιμές του συντελεστή ρ, η $ApEn$ είναι **μικρότερη.** Η μέγιστη $ApEn$ είναι για τη διαδικασία **τυχαίου περιπάτου (Random Walk, RW)**, με $\rho = 0$. Για $\rho = 0.9$, $ApEn = 0.65\, bit$. Αυτό δείχνει ότι η **εμμονή (persistence) είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα στη μέτρηση του οποίου η $ApEn$ είναι αρκετά ευαίσθητη.**

ApEn για την στοχαστ. Διαδικασία AR(1). Η μέγιστη τιμή είναι για ρ=0 (random walk) ($X(k)=\rho \cdot X(\kappa-1) + \varepsilon(\kappa)$, $\kappa=0,1,2,\ldots$)

maxApEn

ApEn

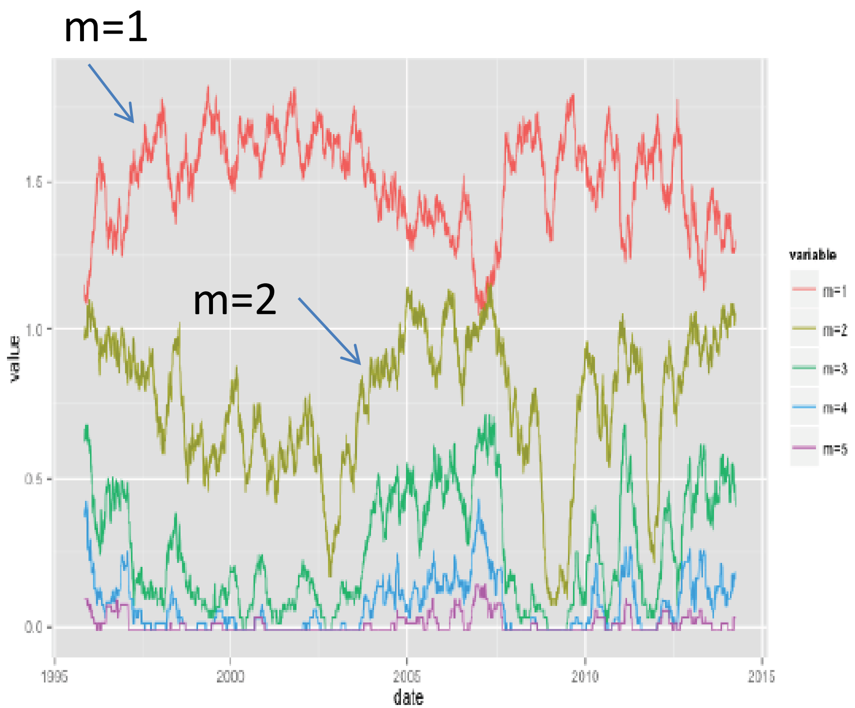


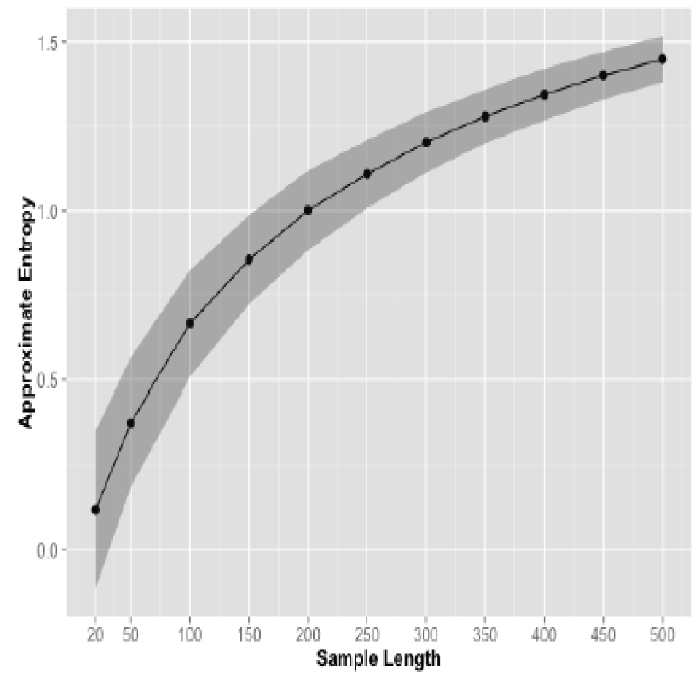
ρ

ρ=0

$X(\kappa)=\varepsilon(\kappa)$ Random walk

(Αριστερά) Κυλιόμενη ApEn (window=90 days), για τον δείκτη SP500
(Δεξιά) ApEn για τυχαίο περίπατο για διάφορα μεγέθη δείγματος,





ApEn with $m = 1, \ldots, 5$ and $N = 20, \ldots 500$.

Left: rolling 90-day window $\widehat{\text{ApEn}}(m = 1, \ldots 5, r = 0.2\hat{\sigma})(\text{SP500})$ time series. Right: graph of estimated ApEn of a random walk with different sample sizes and standard error.

Για μία **τυχαία διαδικασία**, ανεξάρτητων τ.μ. με παρόμοιες ομοιόμορφες κατανομές, η **ApEn προσεγγίζει την τιμή** $\log(r/\sqrt{3})$ **για όλα τα** m (Pincus, 1991).

Για **Ντετερμινιστική διαδικασία,** $ApEn \to 0$

Με ανακλιμάκωση, $0 \leq ApEn \leq 1$, όπου 0 χαρακτηρίζει μία πλήρως **ντετερμινιστική** διαδικασία και 1 μία **πλήρως αβέβαιη** διαδικασία που αντιστοιχεί στην ιδανική κατάσταση μίας **Αποτελεσματικής Αγοράς (efficient market).**

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & ApEn & \leq & 1 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ determinism & & & & randomness \end{array}$$

<u>*Εντροπία:*</u> μέτρο πολυπλοκότητας συστήματος

- Τα συστήματα με **υψηλή εντροπία** παρουσιάζουν **μηδενικές ροές πληροφορίας**, με **τυχαία – αβέβαιη** συμπεριφορά.
- Τα συστήματα με **χαμηλή εντροπία** είναι **ντετερμινιστικά.**
- Η αποτελεσματική αγορά (efficient market) θεωρείται ως ένα «σύστημα» με **μέγιστη εντροπία:**
  Όσο **μικρότερη** είναι η εντροπία, τόσο **αναποτελεσματική** είναι η αγορά.
- Η ApEn είναι κατάλληλο μέτρο της Αποτελεσματικότητας (Efficiency Index), διότι είναι **φραγμένη** (bounded) (Pincus, 1991).

Εντροπία και Μεταβλητότητα

Ας δούμε τώρα τη σχέση της **δυναμικής της μεταβλητότητας** με την εντροπία. Θα μελετήσουμε εδώ την ApEn της μεταβλητότητας, χρησιμοποιώντας γνωστά μοντέλα στα χρηματοοικονομικά που μοντελοποιούν τα χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας

Το μοντέλο GARCH(1,1)

Το πλέον διαδεδομένο μοντέλο μεταβλητότητας στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές είναι το GARCH(p,q) (Baillie & Bollerslev, 1989). Το μοντέλο αυτό «συλλαμβάνει» όλα τα χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας, συγκεκριμένα τη **συσταδοποίηση (clustering),** την **επιστροφή στη μέση τιμή (mean reversion)** και τις **«χονδρές ουρές» (fat tails)** των τιμών των αποδόσεων. Το πιο δημοφιλές είναι το GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (1)$$

όπου $\varepsilon_t = r_t - \mu_t = \sigma_t n_t$ είναι τα κατάλοιπα (innovations) των αποδόσεων (returns) r_t με μέση τιμή μ_t .

Για να καθορίσουμε την «κανονικότητα» της μεταβλητότητας από ένα GARCH(1,1), υπολογίζουμε την $\text{ApEn}(m = 1, r, N)$ των $\{\varepsilon_t^2\}$. Υποθέτοντας ότι $\left|\varepsilon_{t+j-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2\right| < r$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{t+j}^2 - \sigma_t^2\right| &= \left|a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t+j-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+j-1}^2 - (a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)\right| \\ &= \left|a_1(\varepsilon_{t+j-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1(\sigma_{t+j-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)\right| \\ &\le a_1\left|\varepsilon_{t+j-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2\right| + \beta_1\left|\sigma_{t+j-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right| \le a_1 r + \beta_1\left|\sigma_{t+j-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right|\end{aligned}$$

Επειδή $\varepsilon_{t+j}^2 = \sigma_{t+j}^2 n_{t+j}^2$

$$\left|\mathbb{E}\left(\varepsilon_{t+j}^2\right) - \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\right| = \left|\sigma_{t+j}^2 - \sigma_t^2\right| \tag{2}$$

$$\leq a_1 r + \beta_1 \left|\sigma_{t+j-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right| \tag{3}$$

Εάν $\left|\sigma_{t+j-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right| < r$, τότε $\left|\mathbb{E}\left(\varepsilon_{t+j}^2\right) - \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\right| \leq a_1 r + \beta_1 r$ καθώς $a_1 + \beta_1 < 1$.

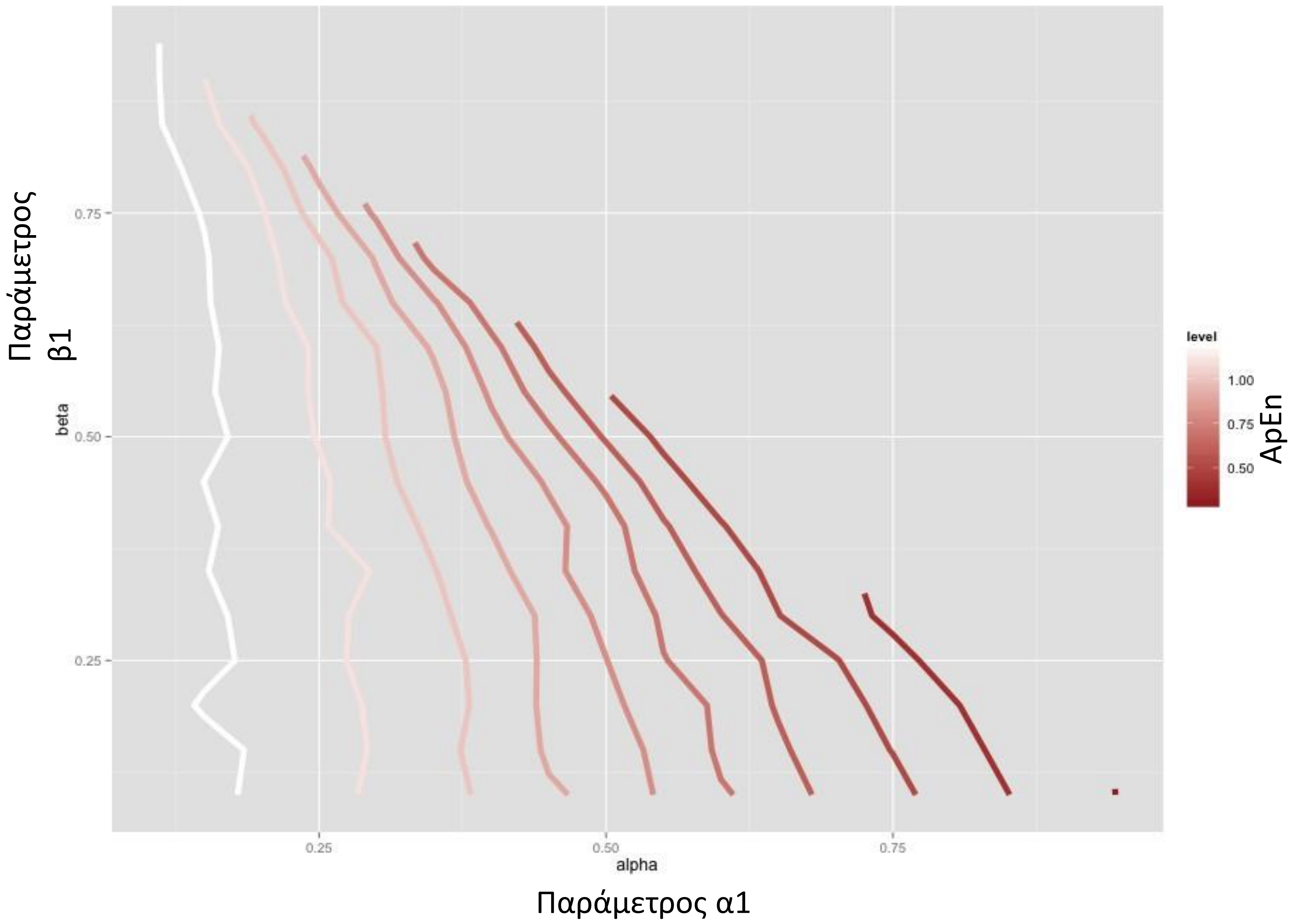
Η εξίσωση (3) παρέχει τις συνθήκες για μεγάλη πιθανότητα ένα επόμενο (δυαδικό) ζεύγος τετραγωνικών καταλοίπων να είναι κοντά, όταν τα προηγούμενα τετραγωνικά κατάλοιπα μίας διαδικασίας GARCH είναι κοντά.

$$\left|\varepsilon_{t+j-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2\right| < r$$

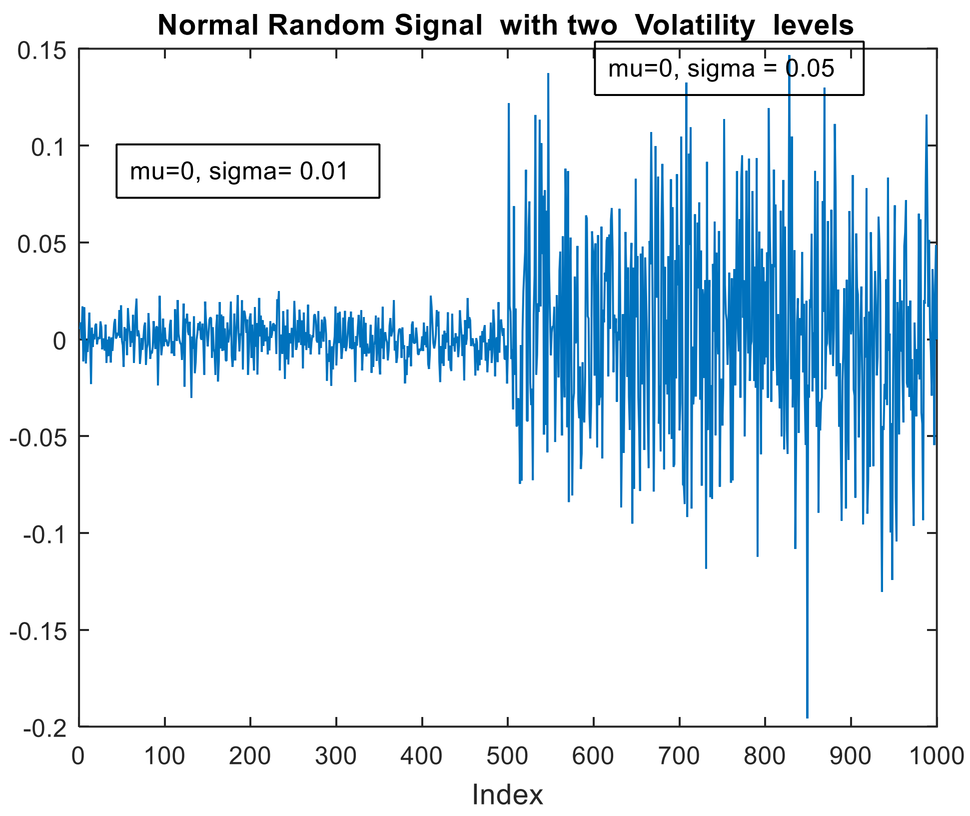
Εάν η πιθανότητα αυτή είναι υψηλή, τότε η **εντροπία** του $\{\varepsilon_t^2\}$ είναι χαμηλή, που σημαίνει ότι η **δεσμευμένη μεταβλητότητα** εμφανίζει **μεγαλύτερη κανονικότητα,** δηλαδή είναι ένας **υψηλότερος** βαθμός **σειριακής συσχέτισης.**

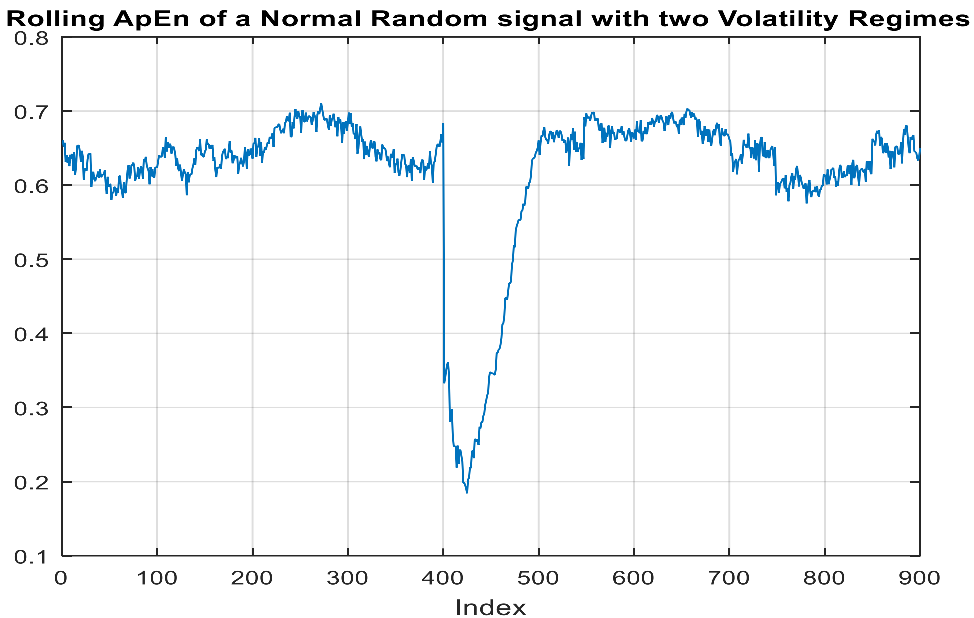
Ακολούθως, θα δούμε πώς οι παράμετροι a_1 και β_1 επηρεάζουν την ApEn των τετραγωνικών αποδόσεων, μέσω Monte Carlo προσομοιώσεων GARCH(1,1) για ποικίλα a_1 και β_1 που παράγουν μία σειρά 400 χρονικών βημάτων. Καταγράφουμε στη συνέχεια τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση των προσομοιώσεων ApEn ($m = 1$, $r = 0.26$, $N = 400$). Οι τιμές ApEn δείχνονται στο ακόλουθο σχήμα με όλους τους συνδυασμούς των παραμέτρων. Υπολογίζουμε την ApEn μόνο για συνδυασμούς παραμέτρων με $a_1 + \beta_1 < 1$.

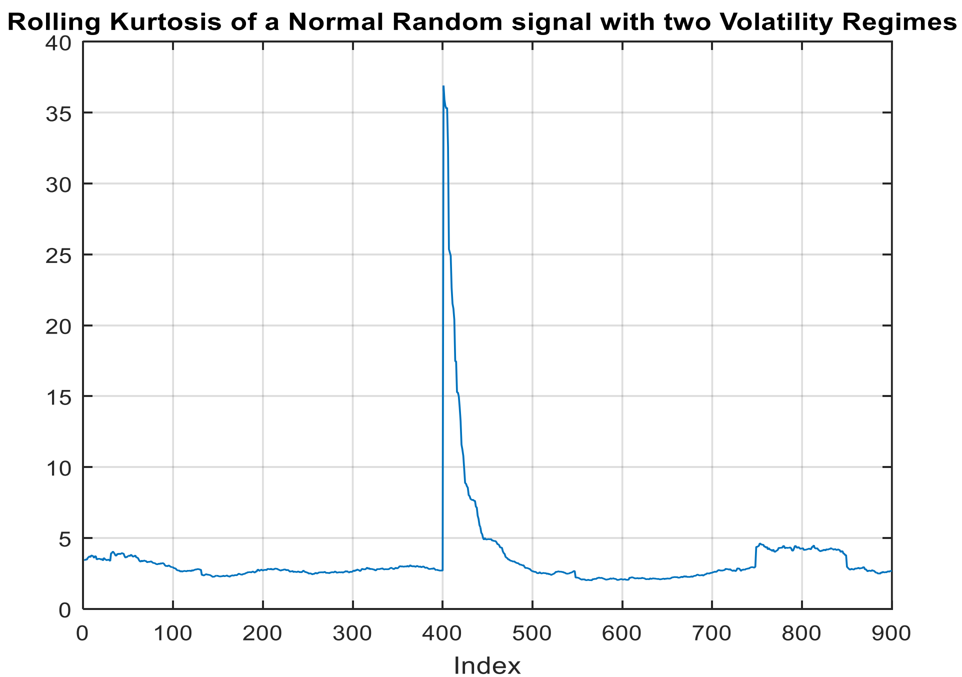
Μεταβολή της ApEn σε σχέση με το επίπεδο Ματαβλητότητας $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$



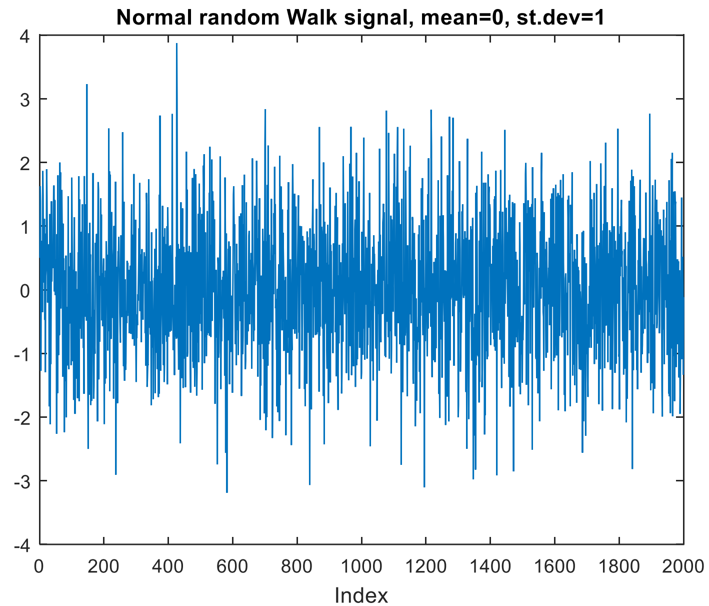
Μεταβολή επιπέδου Μεταβλητότητας και Προσεγγιστική Εντροπία

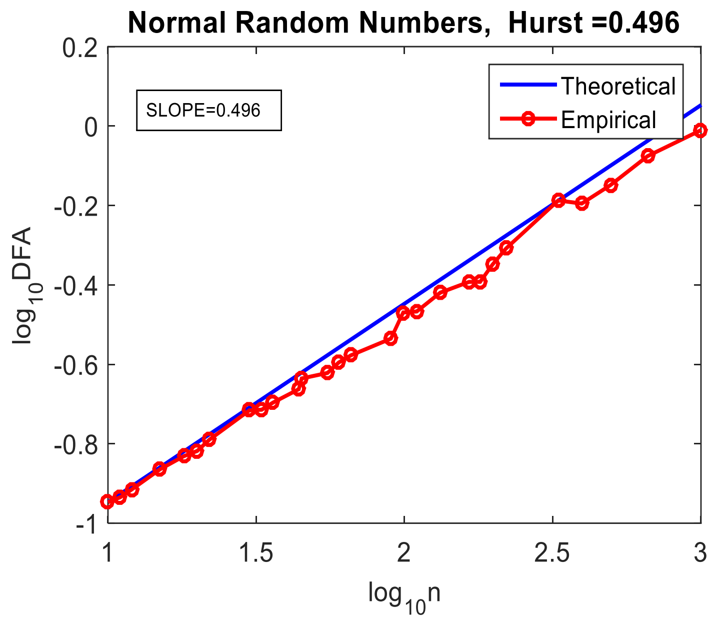



Rolling ApEn of a Normal Random signal with two Volatility Regimes
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
Index


Rolling Kurtosis of a Normal Random signal with two Volatility Regimes
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
Index

Rolling ApEn(m=1, r=0.20*st,dev(x)) of Normal Random Numbers





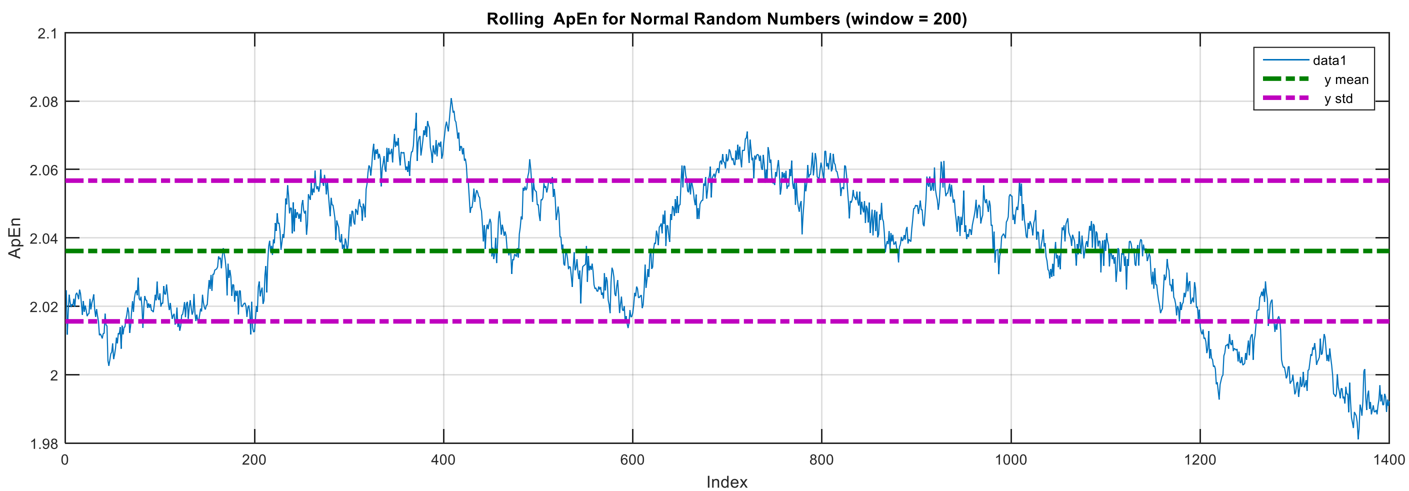


Table 1
History of regulatory market reforms (RMR).

Regulatory Market Reform (RMR)	Launching Date of RMR	Description of the Regulatory Market Reform	Values at time of Regulatory change		Regulator's expected Impact of RMR on SMP	Actual impact of the Reform
			SMP €/MWh	Load MW		
RMR1	01.10.2005	Adoption of mandatory pool (ex-post settlement)	57.10	5322	Upward	Upward
RMR2	01.01.2006	Capacity Adequacy Mechanism	29.23	4975	Neutral	Neutral
RMR3	13.01.2006	1st Change of methodology for SMP calculation	33.06	6839	Upward	Upward
RMR4	01.04.2007	Introduction of Hourly Bids	41.50	5292	Neutral	Downward
RMR5	01.05.2008	Cost Recovery Mechanism	48.70	4544	Neutral	Upward
RMR6	01.01.2009	2nd Change of Methodology for SMP calculation	42.45	5538	Downward	Downward
RMR7	30.09.2010	DA market (mandatory) with imbalance settlement	41.83	5532	Downward	Upward
RMR8	01.09.2011	Introduction of Natural Gas Consumption Tax	73.08	6509	Upward	Upward
RMR9	01.07.2013	Abolishment of the 'Plus 10% Rule'	40.85	5340	Neutral	Upward
RMR10	31.12.2013	Abolishment of the '30% Rule'	60.16	6123	Neutral	Upward

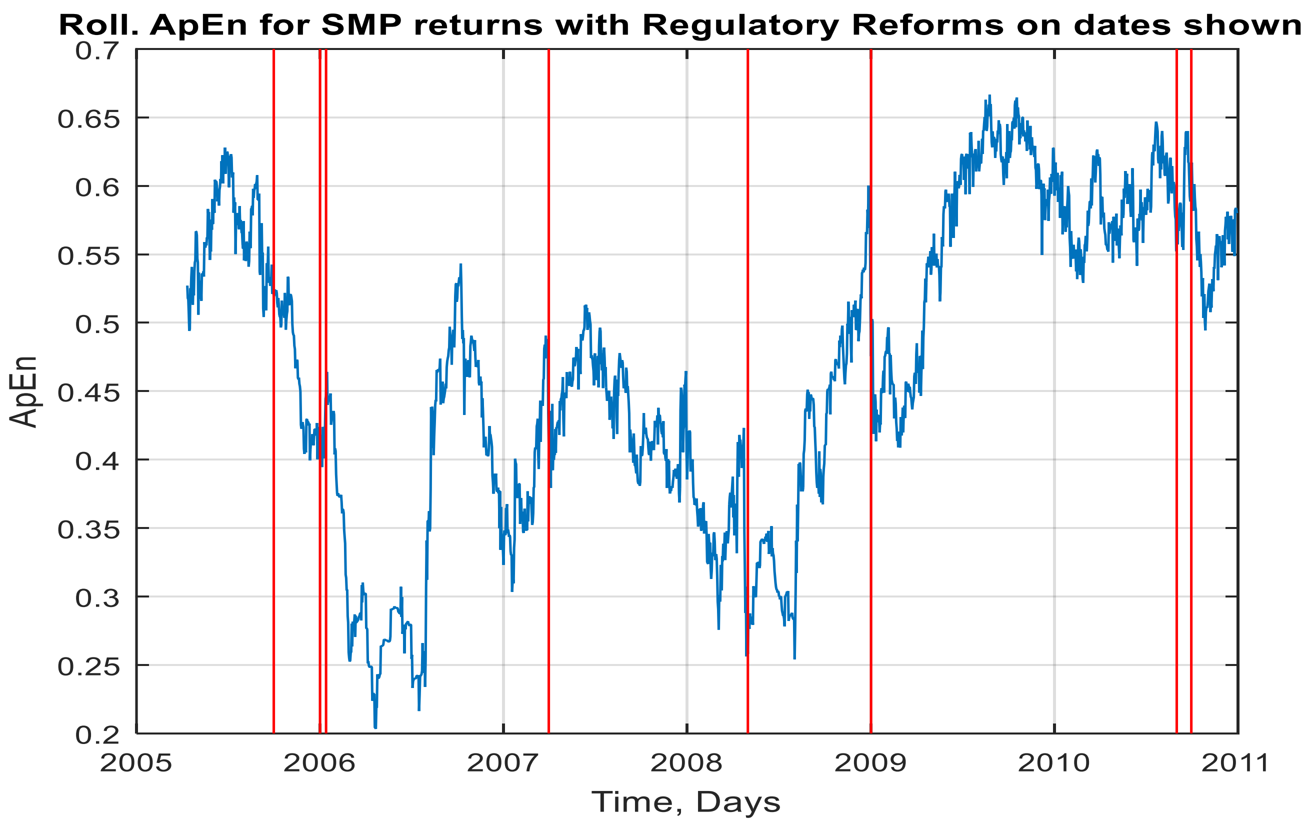
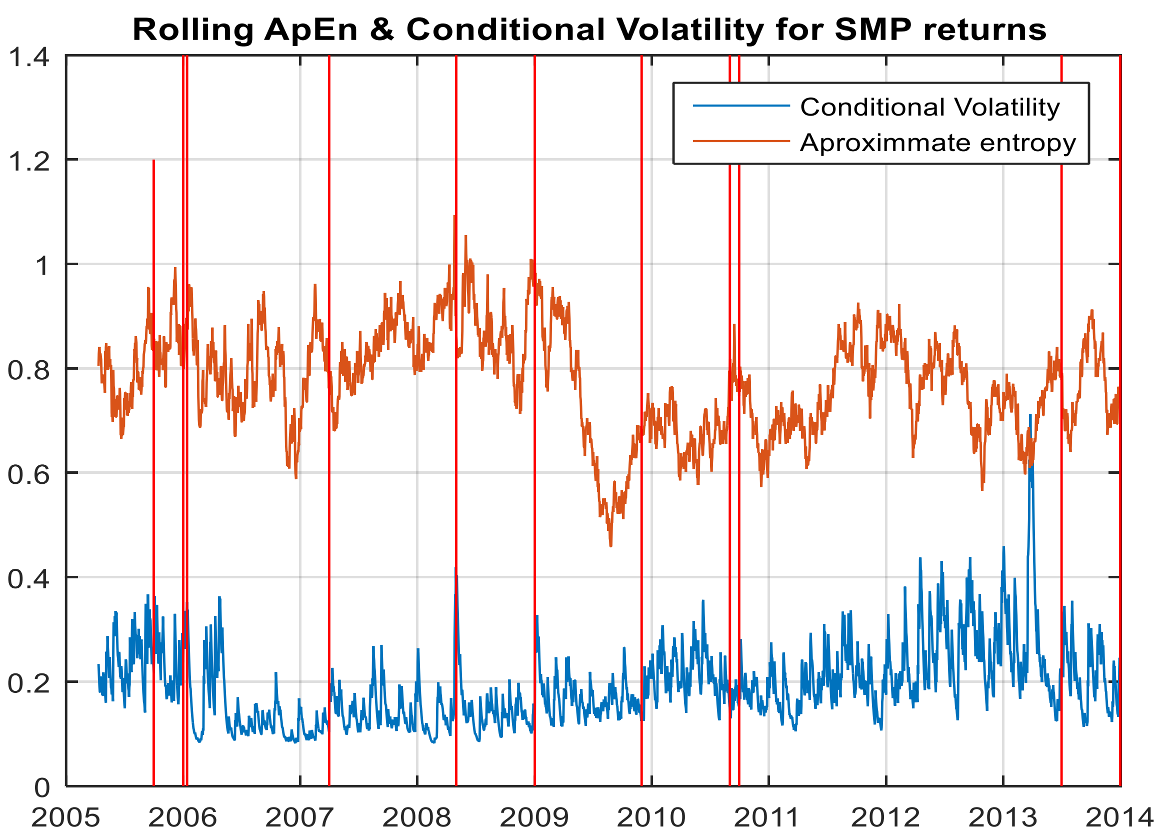
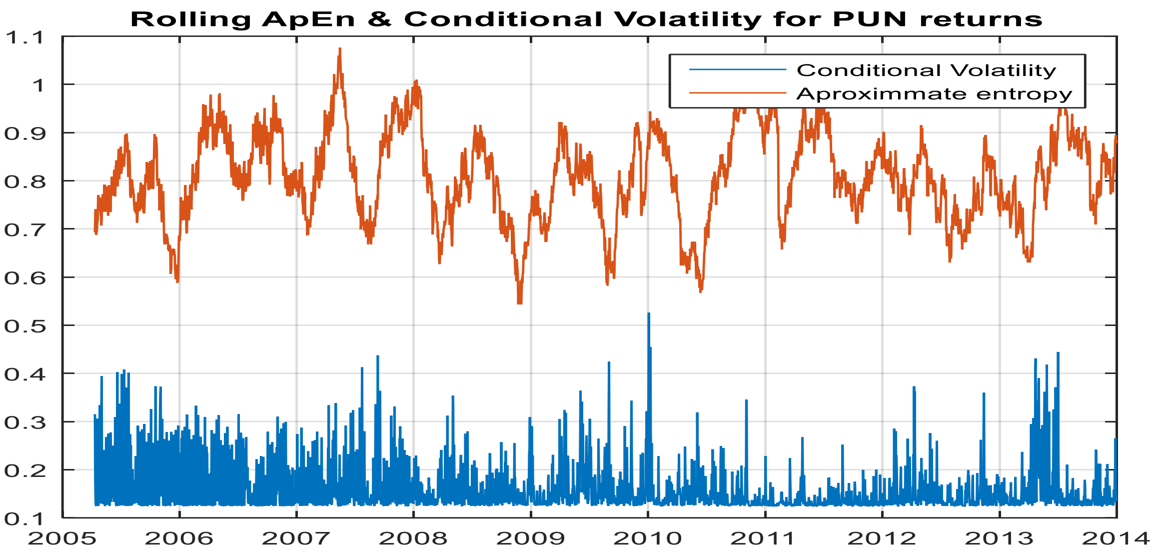


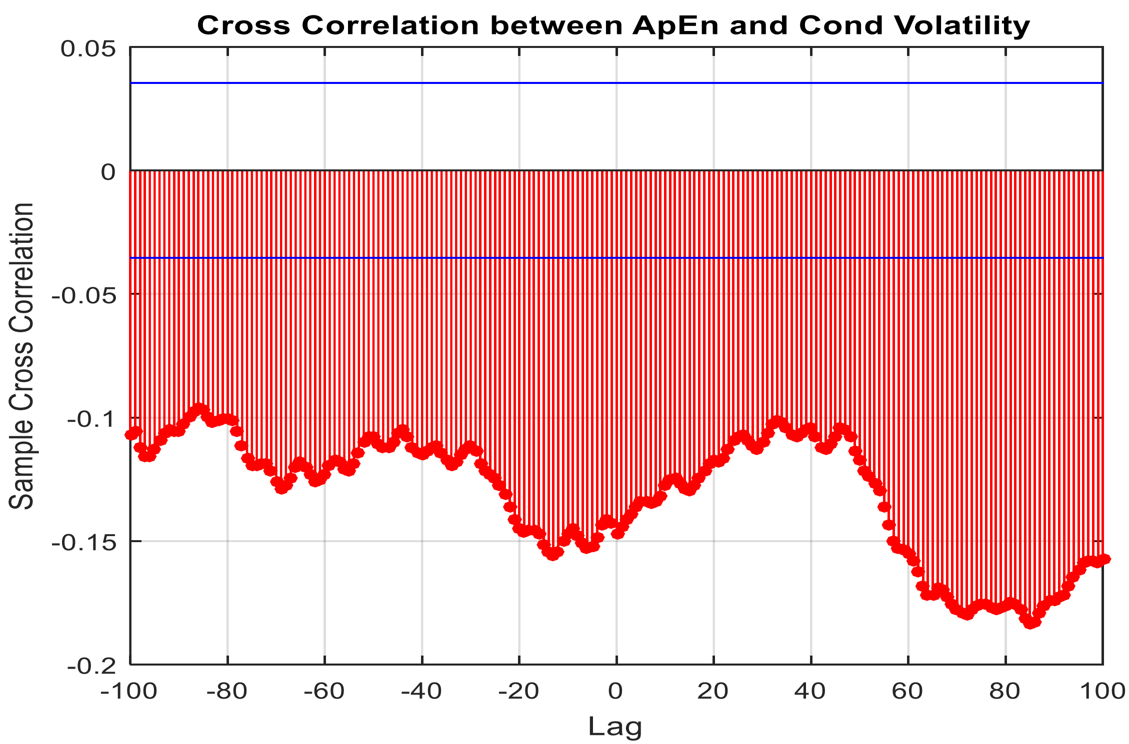
Table 1
History of regulatory market reforms (RMR).

Regulatory Market Reform (RMR)	Launching Date of RMR	Description of the Regulatory Market Reform	Values at time of Regulatory change		Regulator's expected Impact of RMR on SMP	Actual impact of the Reform
			SMP €/MWh	Load MW		
RMR1	01.10.2005	Adoption of mandatory pool (ex-post settlement)	57.10	5322	Upward	Upward
RMR2	01.01.2006	Capacity Adequacy Mechanism	29.23	4975	Neutral	Neutral
RMR3	13.01.2006	1st Change of methodology for SMP calculation	33.06	6839	Upward	Upward
RMR4	01.04.2007	Introduction of Hourly Bids	41.50	5292	Neutral	Downward
RMR5	01.05.2008	Cost Recovery Mechanism	48.70	4544	Neutral	Upward
RMR6	01.01.2009	2nd Change of Methodology for SMP calculation	42.45	5538	Downward	Downward
RMR7	30.09.2010	DA market (mandatory) with imbalance settlement	41.83	5532	Downward	Upward
RMR8	01.09.2011	Introduction of Natural Gas Consumption Tax	73.08	6509	Upward	Upward
RMR9	01.07.2013	Abolishment of the 'Plus 10% Rule'	40.85	5340	Neutral	Upward
RMR10	31.12.2013	Abolishment of the '30% Rule'	60.16	6123	Neutral	Upward



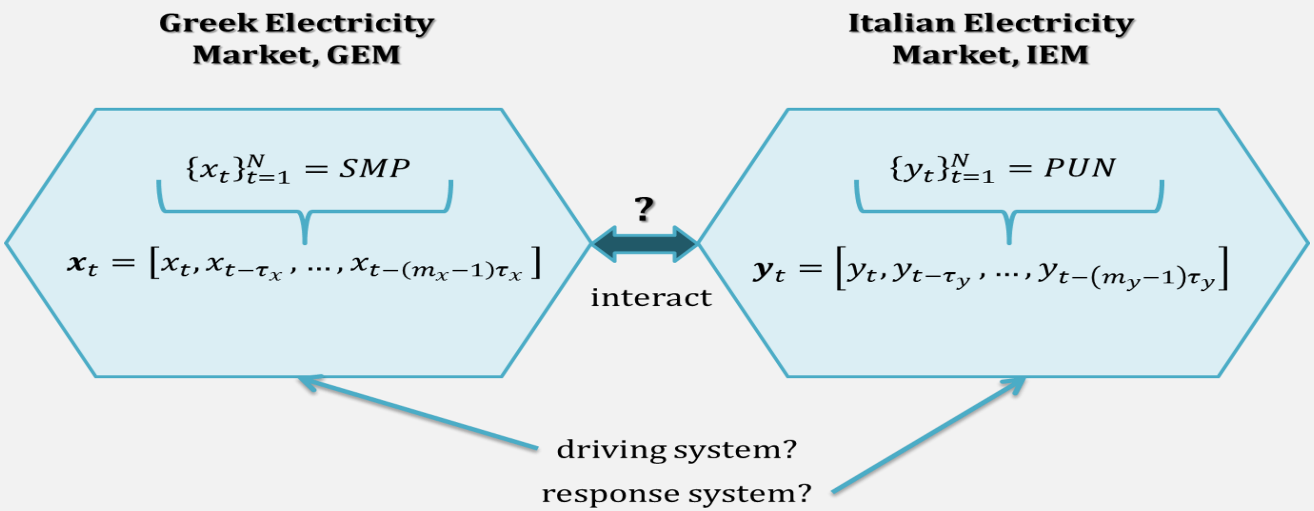


Rolling ApEn & Conditional Volatility for PUN returns
Conditional Volatility
Aproximmate entropy
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014



Cross Correlation between ApEn and Cond Volatility
Sample Cross Correlation
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100
Lag

Εντροπία μεταφοράς σε Rank διανύσματα (Κουγιουμτζής, 2009)



Μέθοδος: **Transfer Entropy (TE)**

Εκτιμά την εντροπία στο **σύστημα απόκρισης (ΣΑ)** μέσω της σύνδεσής του με το **διεγείρον σύστημα (ΔΣ),** λαμβάνοντας υπόψη την παραγόμενη εντροπία εσωτερικά στο ΣΑ.

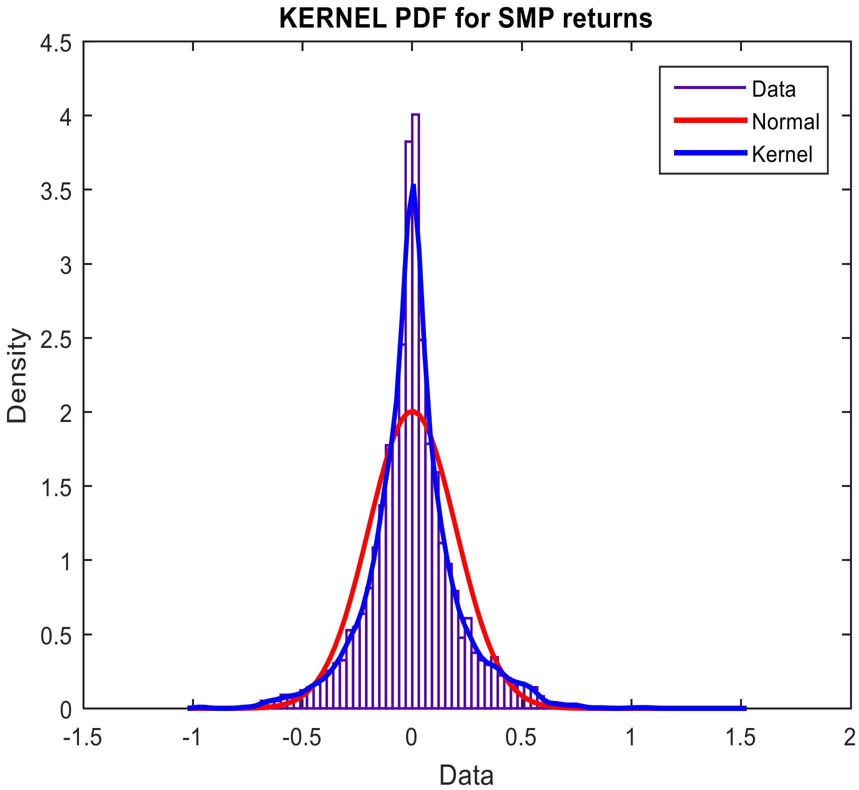
Η TE για την **αιτιακή επίδραση (causal effect)** του συστήματος X στο σύστημα Y, ορίζεται σε όρους **εντροπίας Shannon** $H(x) = \sum \rho(x) \log \rho(x)$, ως εξής:

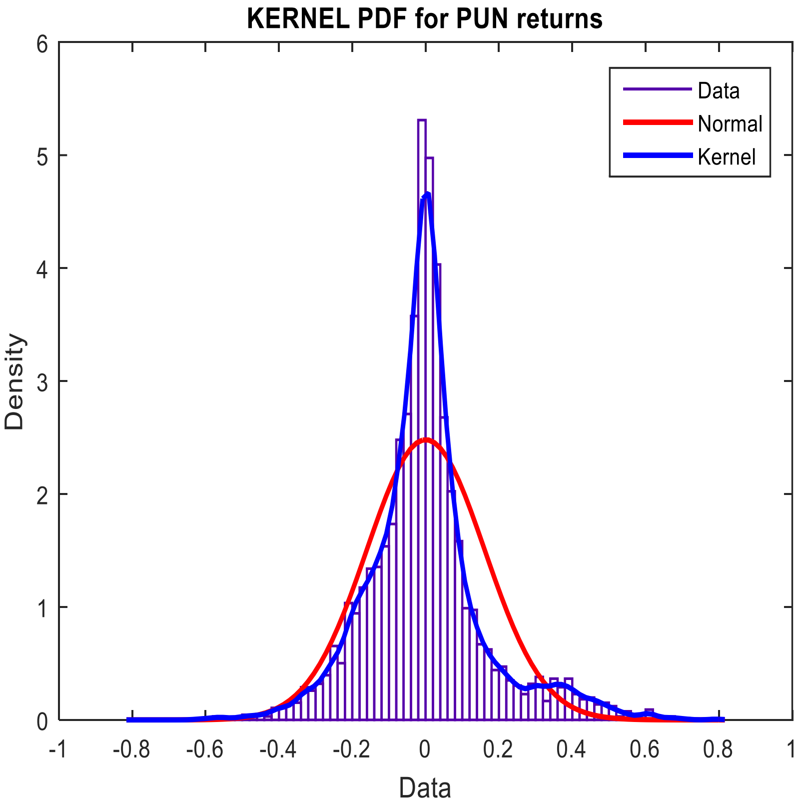
$$TE_{X \to Y} = -H(y_{t+1}, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t) + H(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t) + H(y_{t+1}, \boldsymbol{y}_t) - H(\boldsymbol{y}_t)$$

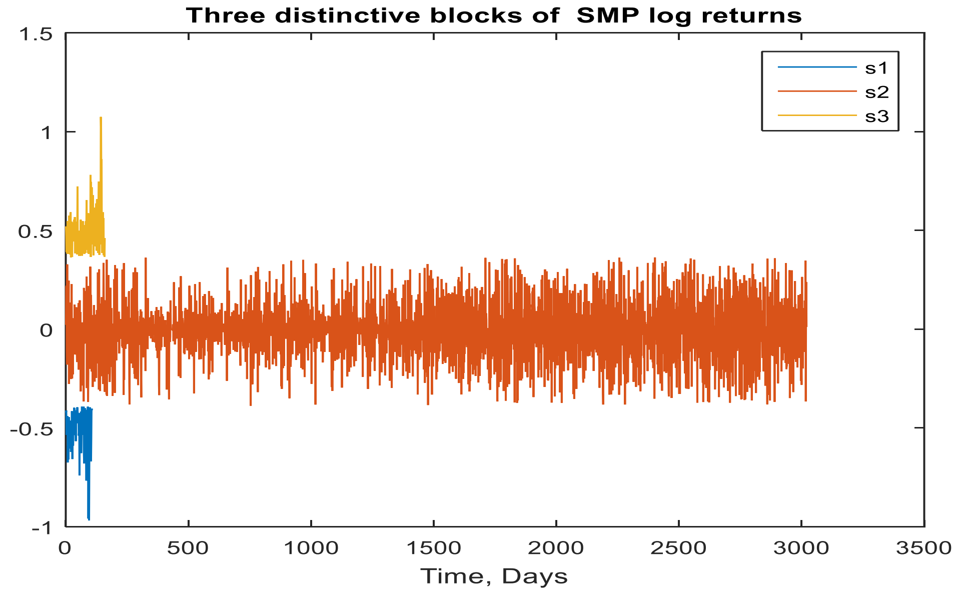
ή άμεσα, σε όρους συναρτήσεων κατανομής

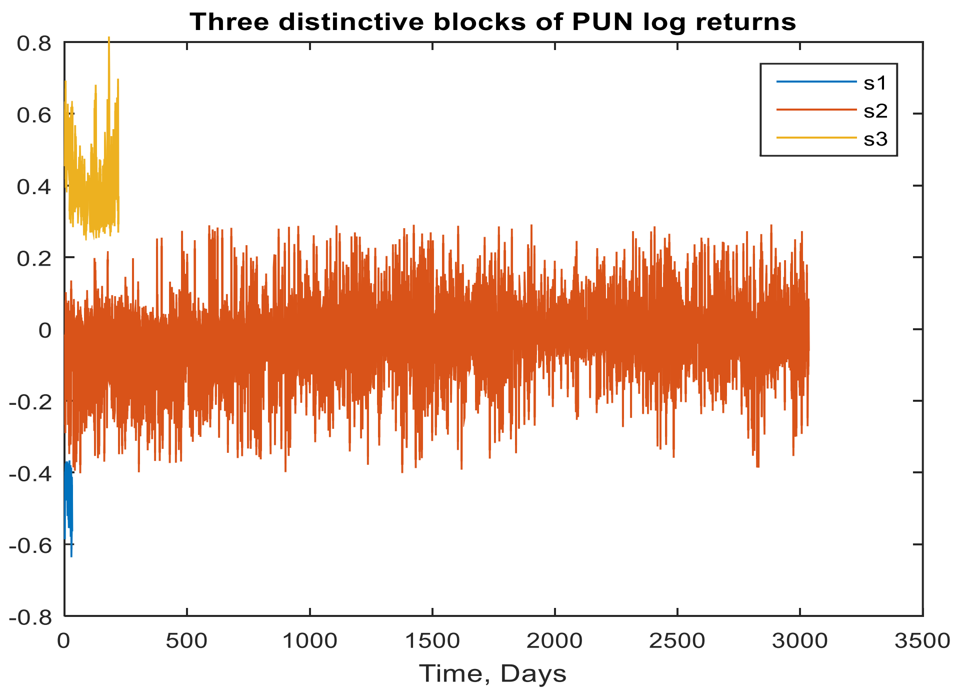
$$TE_{X \to Y} = \sum \rho(y_{t+1}, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t) \log \frac{\rho(y_{t+1} | \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t)}{\rho(y_{t+1} | \boldsymbol{y}_t)}$$

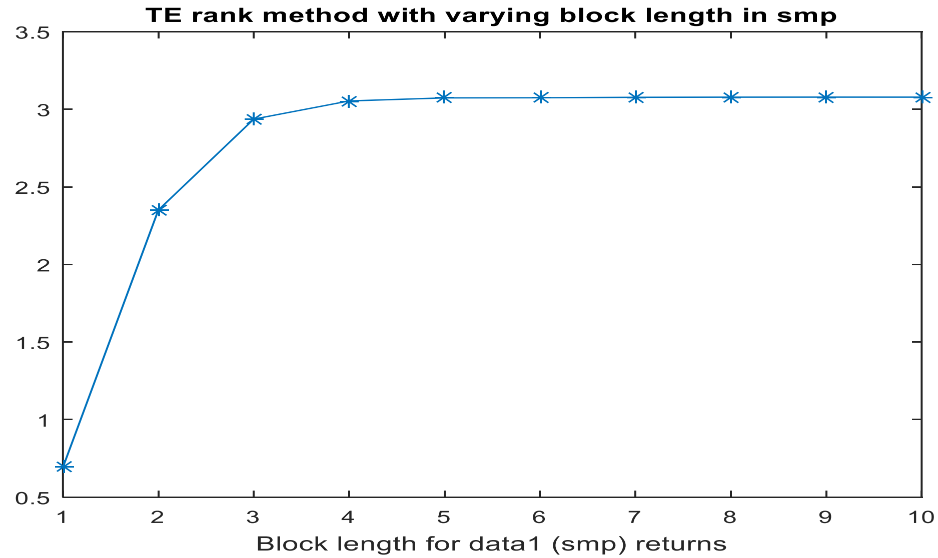
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΤΙΣ ΑΓΟΡΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ ΙΤΑΛΙΑΣ & ΕΛΛΑΔΑΣ





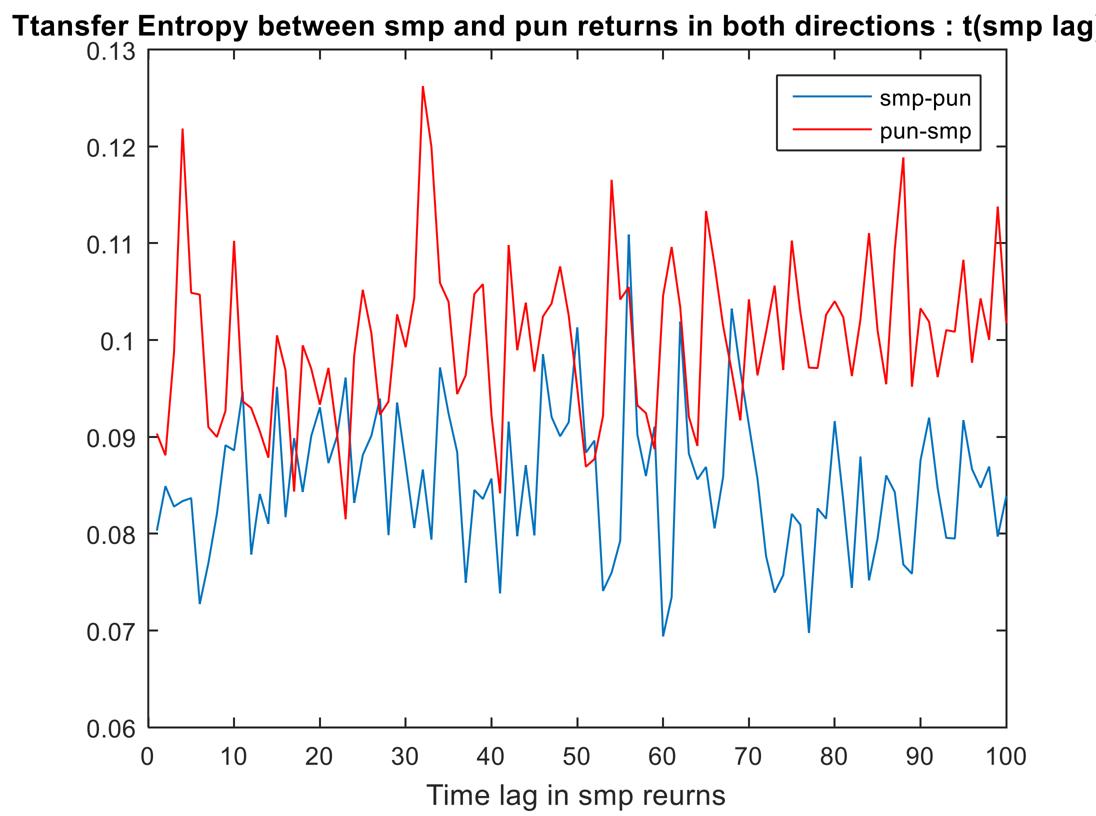

Three distinctive blocks of SMP log returns
s1
s2
s3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
Time, Days


Three distinctive blocks of PUN log returns
s1
s2
s3
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
Time, Days



Η εντροπία Μεταφοράς (ροή Πληροφορίας) απο Ιταλία προς Ελλαδα (I-G)είναι μεγαλύτερη απο ότι
Ελλάδα - Ιταλία (G-I)

T(k,l) (I-G) > T(k,l) (G-I)



Μορφοκλασματική Διάσταση (ΜΔ) (fractal dimension)

Μακροχρόνια μνήμη: χαρακτηριστικό της **ολικής (global) εξάρτησης** και της **δομής συσχέτισης**

Fractal διάσταση D_F : - μέτρο **τοπικής μνήμης** (local memory) της χρονοσειράς

- μέτρο τραχύτητας (roughness) της χρονοσειράς

- Επειδή συγκεκριμένα μέρη της χρονοσειράς διαφέρουν ως προς την τραχύτητα και ομαλότητα, η χρονοσειρά μπορεί να είναι **τοπικά σειριακά συσχετισμένη**, μολονότι, σε **ολικό** επίπεδο (global) οι συσχετίσεις ενδεχομένως «εξαφανίζονται» και δεν είναι απαραίτητα παρατηρήσιμες.
- Για μονοδιάστατες χρονοσειρές : $1 < D_F \leq 2$
  Για **αυτό-όμοιες** διαδικασίες : $D_F = 2 - H$ όπου H εκθέτης Hurst (long-term memory)
  Τι σημαίνει αυτό σε «Οικονομικούς όρους»; Μία τέλεια μετάδοση μίας **τοπικής** συμπεριφοράς (MD, D_F) σε μία **ολική** συμπεριφορά (long-term memory)

$$D_F = 2 - H$$

local behaviour

global behaviour
long-term memory

Η ανωτέρω σχέση **δεν** ισχύει τέλεια στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, οπότε οι D_F και H από μόνες τους παρέχουν διαφορετικές θεωρήσεις της δυναμικής.

- $D_F = 1.5$ για: ασυσχέτιστες, χωρίς τοπική τάση ή χωρίς τοπικές αντι-συσχετίσεις και άρα **τιμή αναφοράς για την Αποτελεσματική Αγορά (efficient market)**

- $D_F < 1.5 \Rightarrow$ τραχύτητα < τραχύτητα ασυσχέτιστης χρονοσειράς, άρα χρονοσειρά **τοπικά persistent**

- $D_F > 1.5 \Rightarrow$ τραχύτητα > τραχύτητα ασυσχέτιστης χρονοσειράς, τοπική αντί-εμμονή (anti-persistence) ή **mean-reverting** ή **αρνητικά-συσχετισμένη** τοπικά

Εκθέτης Hurst & η Μέθοδος Ανακλιμακούμενου Εύρους (Rescaled Range (R/S))

Ο Hurst ανέπτυξε μία μέθοδο, τη Rescaled Range (R/S), για τη διάκριση τυχαίων (random) και συσχετισμένων (correlated) χρονοσειρών (Hurst, E., 1965).

Η διαδικασία της ανάλυσης Hurst ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Χωρίζουμε τη χρονοσειρά X (αποδόσεις, returns), μήκους L, σε d υποσειρές, μήκους n η κάθε μία.
2. Για κάθε υποσειρά $k = 1, \dots, d$ βρίσκουμε τη **μέση τιμή** E_k και την τυπική απόκλιση S_k της X.
3. Κανονικοποιούμε τα δεδομένα $Z_{i,k}$, αφαιρώντας τη δειγματική μέση τιμή

$$Z_{i,k} = X_{i,k} - E_k \quad \text{για} \quad i = 1, \dots, n$$

4. Δημιουργούμε την αθροιστική χρονοσειρά

$$Y_{i,k} = \sum_{j=1}^{i} Z_{j,k} \quad \text{για} \quad i = 1, \dots, n$$

5. Βρίσκουμε το εύρος (range)

$$R_k = max\{Y_{i,k}, \dots, Y_{n,k}\} - min\{Y_{1,k}, \dots, Y_{n,k}\}$$

6. Ανακλιμακώνουμε την R_k / S_k
7. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή του R_k / S_k για όλες τις υποσειρές μήκους n.

Έχει αποδειχθεί ότι ισχύει ασυμπτωτικά η σχέση $(R/S)_n \sim cn^H$, οπότε

$$\underbrace{\log(R/S)_n}_{y} = \underbrace{\log c}_{a} + \underbrace{H}_{x} \cdot \underbrace{\log n}_{b} \qquad (\text{μορφής } y = a + b \cdot x)$$

Η κλίση H βρίσκεται με απλή παλινδρόμηση regression και $0 \leq H \leq 1$.
Εάν η διαδικασία είναι:

➢ **Λευκός Θόρυβος (white noise) ή Τυχαίος Περίπατος (Random Walk, RW):**	$\boldsymbol{H = 0.5}$
➢ **Αρνητικά συσχετισμένη ή αντί-εμμονική (antipersistent ή mean reverting):**	$H < 0.5$
➢ **Θετικά συσχετισμένη ή εμμονική (persistent):**	$H > 0.5$

Ο εκθέτης σχετίζεται με τη **μορφοκλασματική (fractal) διάσταση** D_F ως εξής:

$$D_F = 2 - H$$

Ο Εκθέτης H ποσοτικοποιεί τη **συσχέτιση** σε μία κλασματική κίνηση Brown (Fractional Brownian motion, FBM). Η FBM είναι **τυχαίος περίπατος** με $H \neq 0.5$, άρα μία διαδικασία με **μνήμη (memory).** Επίσης, η σχέση της Φασματικής πυκνότητας (spectral density) ενός FBM με τον Hurst, είναι

$$P(f) \propto \frac{1}{f^{\beta}} \quad \boxed{\Rightarrow \quad \beta = 2H} + 1 \qquad (\text{για FBM})$$

όπου β ο Εκθέτης Φάσματος Ισχύος.

Ανάλυση μεταβλητότητας χρονοσειράς χωρίς τάση (Detrended Fluctuation Analysis, DFA)

Η DFA είναι ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μακροχρόνιας εξάρτησης και προτάθηκε από τον Peng et al (1994). Το πλεονέκτημα έναντι της κλασικής R/S μεθόδου είναι ότι αποφεύγει τα προβλήματα όταν η μη-στασιμότητα εκλαμβάνεται ως φαινομενική μακροπρόθεσμη συσχέτιση.

Για την εκτίμησή της, διαμερίζουμε τη χρονοσειρά X μήκους L των αποδόσεων (returns) σε d τμήματα μήκους n. Για κάθε υπο-χρονοσειρά τότε $k = 1, \dots, d$

α) Δημιουργούμε την αθροιστική χρονοσειρά

$$Y_{i,k} = \sum_{j=1}^{i} X_{j,k} \qquad i = 1, \dots, n$$

β) Προσαρμόζουμε, με ελάχιστα τετράγωνα, τη γραμμή

$$\tilde{Y}_k(x) = a_k x + b_k \quad \text{στη} \quad \{Y_{1,k}, \dots, Y_{n,k}\}$$

γ) Υπολογίζουμε τη ρίζα μέσης τετραγωνικής (RMS) **μεταβλητότητας** (της τυπικής απόκλισης) της πρώτης διαφοράς (άρα ολοκληρωμένης λόγω returns) και χωρίς τάση χρονοσειράς

$$F(k) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{i,k} - a_k i - b_k\right)^2}$$

Η μέση τιμή της RMS μεταβλητότητας για όλα τα τμήματα (υποσειρές, μήκους n, είναι

$$\bar{F}(k) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} F(k)$$

Σχεδιάζουμε σε «διπλό-λογαριθμικό χαρτί» την $\bar{F}(k)$ ως προς n και έχουμε κλιμάκωση (scaling) νόμου δύναμης (**power law scaling**)

$$\bar{F}(k) \approx cn^{H_{DFA}}$$

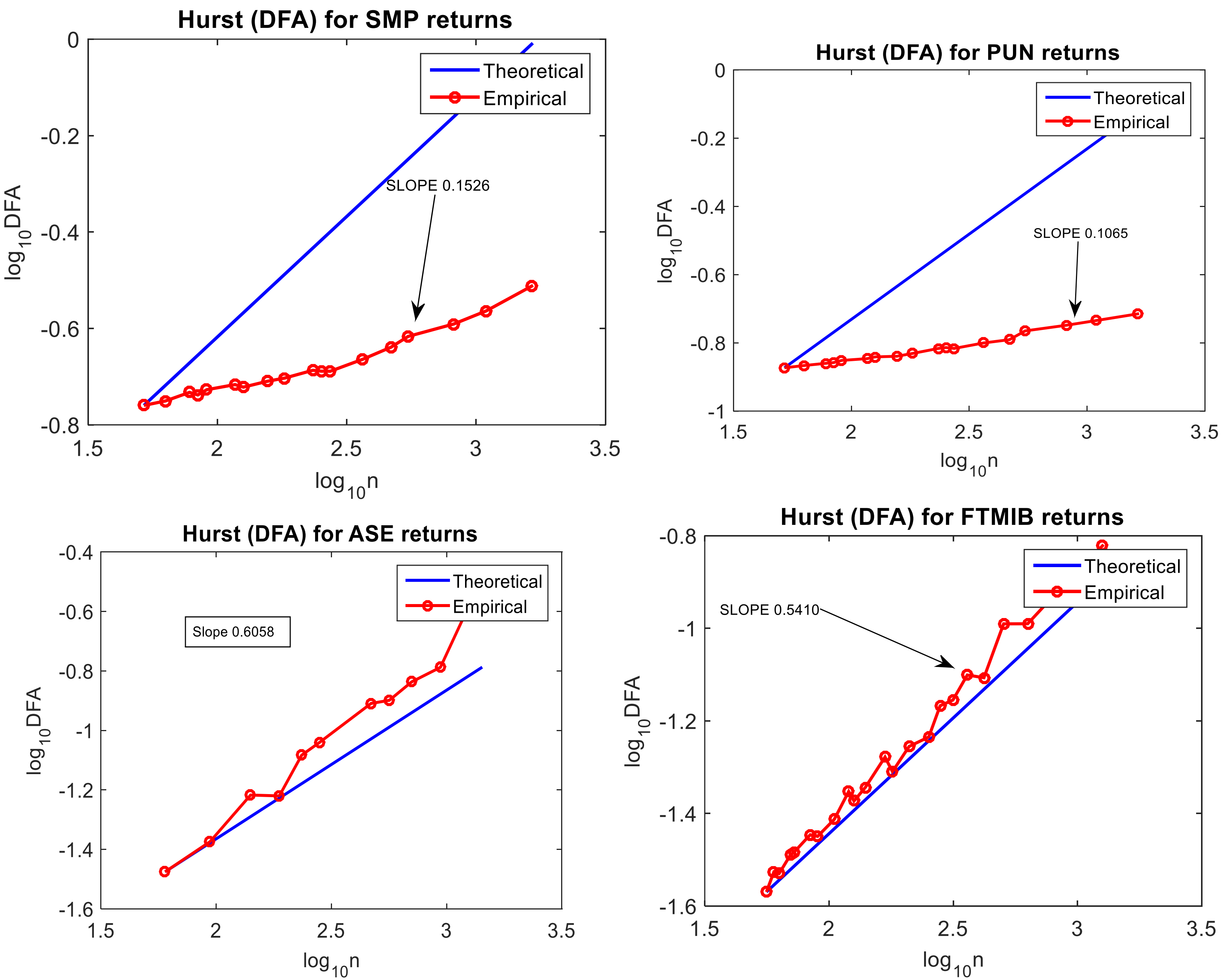
οπότε

$$\log\left(\bar{F}(k)\right) = \log c + H_{DFA} \log n \qquad \text{μορφής} \quad y = a + bx$$

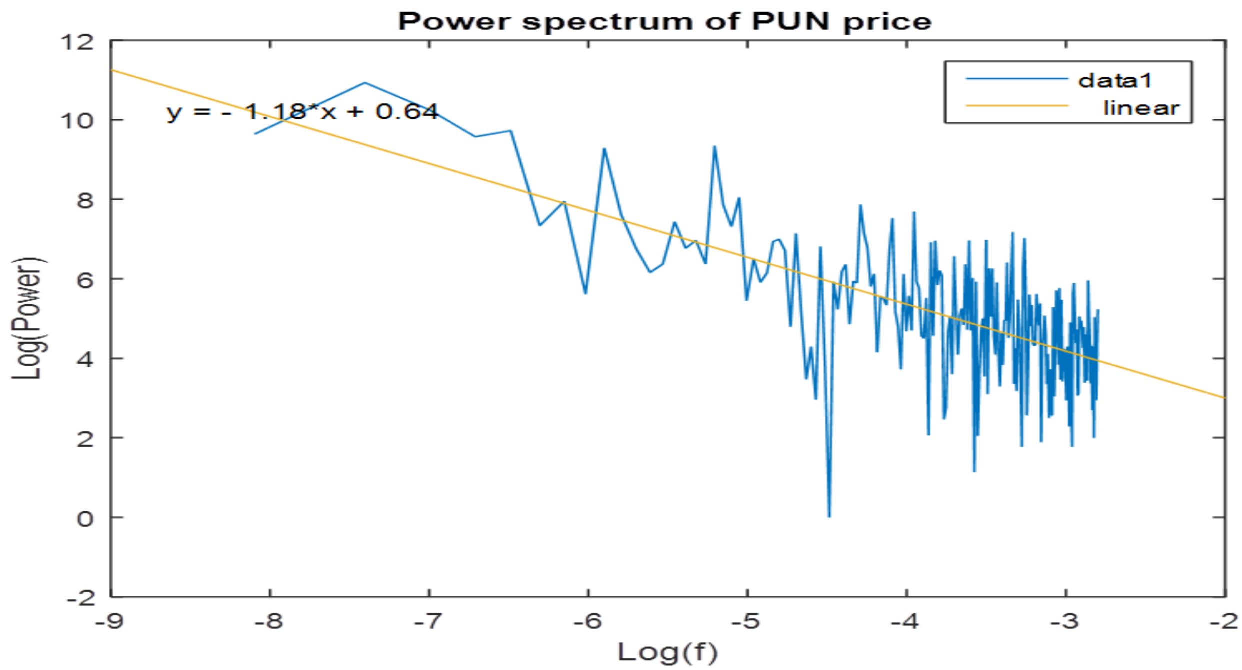
Ανάλογα με τη στοχαστική διαδικασία, ο H λαμβάνει τις εξής τιμές:

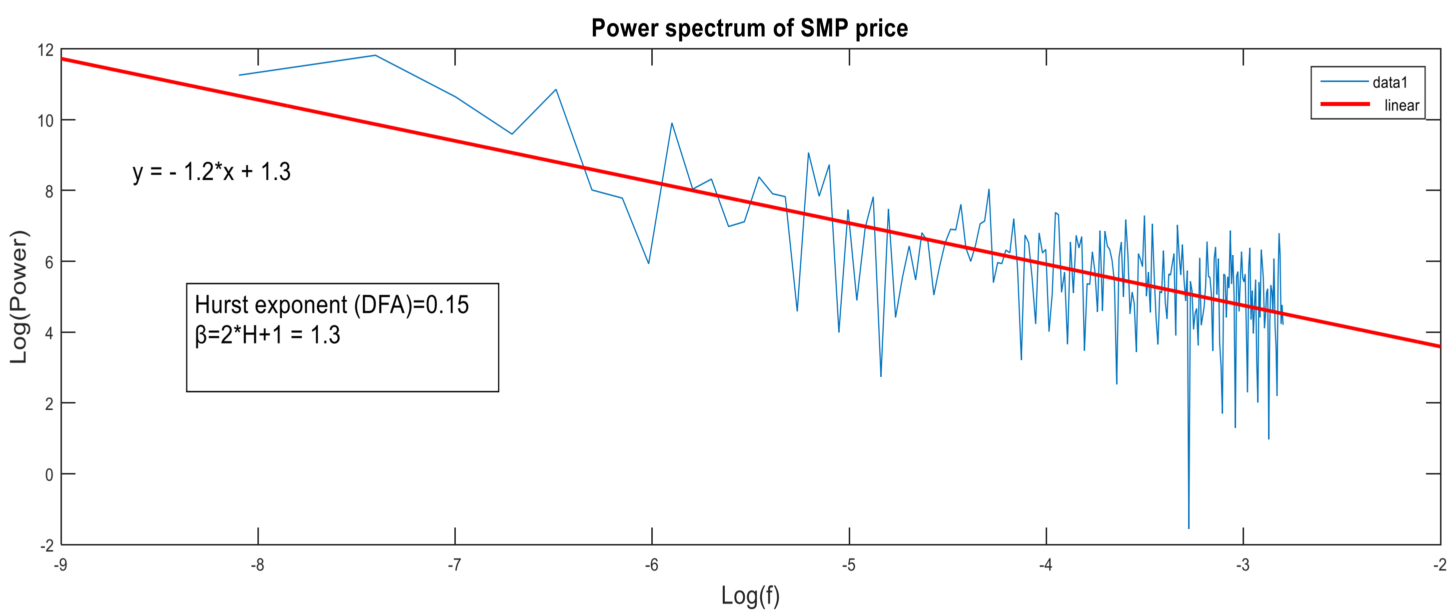
➢ **Λευκός Θόρυβος ασυσχέτιστος:**	$\boldsymbol{H_{DFA} \cong 0.5}$
➢ **Διαδικασία με εμμονή (persistence process) συσχετισμένη:**	$H_{DFA} > 0.5$
➢ **Διαδικασία με αντί-εμμονή (antipersistent ή mean reverting ή anti-correlated):**	$H_{DFA} < 0.5$
➢ $\boldsymbol{\frac{1}{f}}$ **– θόρυβος, pink noise:**	$H_{DFA} \approx 1$
➢ **Μη-στάσιμη, μη φραγμένη:**	$H_{DFA} > 1$
➢ **Brownian θόρυβος:**	$H_{DFA} \approx \frac{3}{2}$

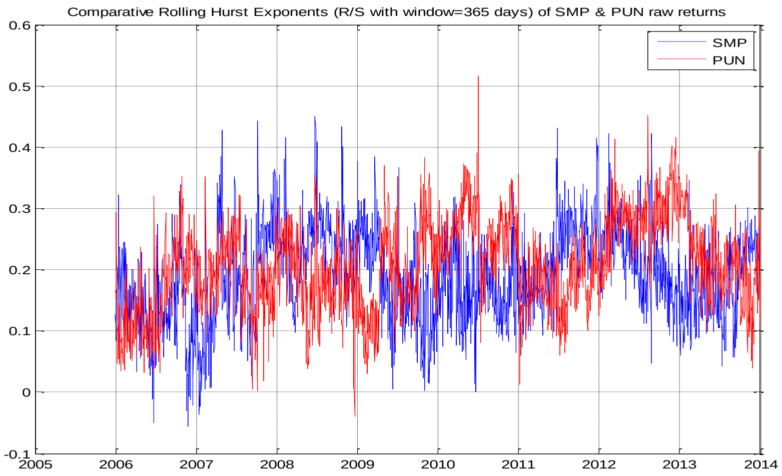
Σε σχέση με τον κλασικό Εκθέτη Hurst, H, που αντιστοιχεί στη 2η ροπή **στάσιμων** διαδικασιών, έχουμε $H = H_{DFA}$, ενώ για **μη-στάσιμες** $H = H_{DFA} - 1$ (Stanley, H., et al., Physica A, 269, 1999). Τόσο για το δείκτη H όσο και για τον H_{DFA} δεν υπάρχει ασυμπτωτική θεωρία κατανομής τους. Ο Weron (2002) έχει βρει εμπειρικά επίπεδα εμπιστοσύνης μέσω Monte Carlo προσομοιώσεις.


Hurst (DFA) for SMP returns
Theoretical
Empirical
SLOPE 0.1526
log10DFA
log10n
Hurst (DFA) for PUN returns
Theoretical
Empirical
SLOPE 0.1065
log10DFA
log10n
Hurst (DFA) for ASE returns
Theoretical
Empirical
Slope 0.6058
log10DFA
log10n
Hurst (DFA) for FTMIB returns
Theoretical
Empirical
SLOPE 0.5410
log10DFA
log10n

Μέθοδος			
Χρονοσειρά	**R/S-AL**	**DFA**	**GPH**
Ηλεκτρικές Αγορές (returns)			
SMP	0.2145	0.1526	0.333
PUN	0.2427	0.1065	0.4581
Ηλεκτρικές Αγορές (deseasonalized returns)			
SMP		Αυξάνονται ελαφρώς	
PUN		Αυξάνονται ελαφρώς	
Χρηματιστηριακές Αγορές (returns)			
ASE	0.6058	0.6501	0.6156
FTMIB	0.5300	0.5410	0.5574
Χρηματιστηριακές Αγορές (απόλυτη τιμή returns)			
ASE	0.6058	0.650	0.665
FTMIB	0.9051	1.0324	0.9985

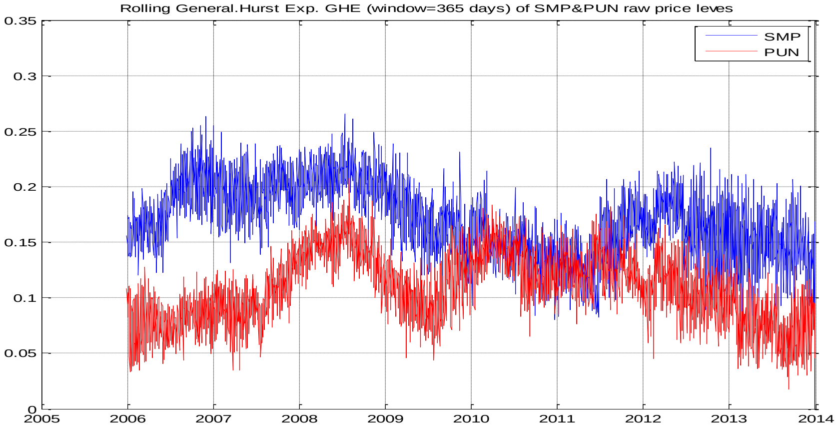

Power spectrum of PUN price
data1
linear
y = - 1.18*x + 0.64
Log(Power)
Log(f)


Power spectrum of SMP price
data1
linear
y = - 1.2*x + 1.3
Hurst exponent (DFA)=0.15
β=2*H+1 = 1.3
Log(Power)
Log(f)



Historic evolution of Hurst exponent of SMP and PUN returns for the time period 2005 – 2013, estimated by R/S method with **rolling window** 365 days.

: Generalized Hurst exponent GHE of SMP and PUN price levels for the time period 2005 – 2013, with **rolling window** 365 days.



Measure	Symbol	Expected Value for Efficient Market	Actual Value	Gap
Hurst Exponent	M^*_H	0.5		
Fractal Dimension of Random Walk	$M^*_{D_F}$	2		
Shannon Entropy	M^*_{SE}	1		
Approximate Entropy	M^*_{AE}	2 ή 1 με ανακλιμάκωση (rescaled)		
Run Test	M^*_{RT}	Z(iid)		

Measure	Electricity Markets		Stock Exchange Markets	
	SMP	PUN	ASE	FTMIB
Hurst Exponent H (DFA)	0.1526	0.106	0.650	0.541
Fractal Dimension D_F (box)	1.597	1.5813	1.528	1.347
Shannon Entropy SE (Normalized)	0.419	0.428	0.417	0.412
Approximate Entropy AE	1.2732	1.4238	1.684	1.740
Run Test RT	R:1869 Z: 7.84	R: 2106 Z: -3.46	1289 Z:-4.51	1700 Z:0.49

Πρόταση για υιοθέτηση απο τους Οργανισμούς :
European Commission / Market Observatory for Energy και ENTSO-e (European Network Transmission System Operators-electricity)

Ορίζουμε τον Δείκτη Απόδοσης Ηλεκτρικής Αγοράς ΔΑΗΑ (Electricity Market Efficiency Exponent - EMME) ώς εξής

$$EMEE = \sqrt{(SE - M_{SE}^{*})^2 + (RT - M_{RT}^{*})^2 + (H - M_{H}^{*})^2 + (D_F - M_{D_F}^{*})^2}$$

Mutual Information & Transfer Entropy (Αμοιβαία Πληροφορία & Εντροπία Μεταφοράς

Σχέση Διαφορων Εντροπιών & Αμοιβαίας Πληροφορίας

α) $h(_{\text{infinity}})$ & $H(X_0|X_{-1})$, β) $I(X_t, Y_t)$, $I(X_t, Y_{t-1})$, και γ) $T_{Y \rightarrow X}(1, 1)$